UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

ALTENIZE DOS SANTOS CORDEIRO OLIVEIRA

Cálculo Fracionário: contribuições históricas e aplicações físicas

Campinas
2018

Altenize dos Santos Cordeiro Oliveira

Cálculo Frácionário: contribuições históricas e aplicações físicas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Altenize dos Santos Cordeiro Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Felix Silva Costa.

Campinas
2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4c

Oliveira, Altenize dos Santos Cordeiro, 1982-
Cálculo fracionário : contribuições históricas e aplicações físicas / Altenize dos Santos Cordeiro Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2018.

Orientador: Felix Silva Costa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Cálculo fracionário – História. 3. Cálculo fracionário – Aplicações científicas. 4. Integrais fracionárias. 5. Modelos fracionários. 6. Derivadas fracionárias. I. Costa, Felix Silva, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Fractional calculus : historical contributions and physical applications
Palavras-chave em inglês:
Fractional calculus
Fractional calculus - History
Fractional calculus - Scientific applications
Fractional integrals
Fractional models
Fractional derivatives
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestra em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Felix Silva Costa [Orientador]
Edmundo Capelas de Oliveira
Eliana Contharteze Grigoletto
Data de defesa: 25-01-2018
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de janeiro de 2018 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). FELIX SILVA COSTA

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). ELIANA CONTHARTEZE GRIGOLETTO

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

À minha família, especialmente à minha filha Nicole Emily e aos meus amigos.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus, pela benção de conseguir ingressar no Mestrado Profissional da Unicamp.

Agradeço aos professores de graduação, Neri Terezinha Both e Rubens Starke, pelos quais tenho muita admiração. O professor Rubens sempre esteve disposto a ajudar e tornou-se um grande amigo.

Agradeço aos meus amigos que sempre me apoiaram e ajudaram nesta jornada, especialmente a Rayane Melo, Geovan Mendonça e Paulo Filho.

Agradeço ao Cristiano Torezzan, uma pessoa extraordinária, que sempre foi atencioso e compreensível em relação a minha gravidez durante o mestrado. Agradeço por ter intermediado para que o professor Felix fosse meu orientador.

Agradeço a minha mãe, que sempre esteve presente, e cuidou da minha filha com carinho enquanto estive ausente.

Agradeço ao meu orientador por ter aceitado o convite. Agradeço pela atenção, paciência, dedicação e pela grande ajuda. Não tenho palavras para agradecer todo seu empenho em me ajudar.

Resumo

O cálculo de ordem arbitrária, popularmente conhecido como cálculo fracionário tem se tornado tão importante quanto o cálculo de ordem inteira. Seu estudo tem sido utilizado em vários campos da ciência e engenharia, neste trabalho é feito um levantamento histórico desde sua origem, que se deu na troca de correspondências entre Leibniz e L'Hôpital até os dias atuais, com objetivo de apresentar as grandes contribuições de pesquisadores e estudiosos que foram primordiais para que o seu desenvolvimento fosse possível e crescente até hoje e também mostrar que durante essas contribuições existiram algumas controvérsias. Depois de apresentados os fatos históricos, apresentam-se as principais definições e propriedades que são indispensáveis para a compreensão do Cálculo Fracionário e algumas aplicações concentradas na física.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Levantamento Histórico. Derivadas Fracionárias. Integrais Fracionárias. Modelos Fracionários.

Abstract

The Arbitrary Order Calculus (AOC) also known as Fractional Calculus (FC) has become as important as the Integral Order calculus (IOC). Studies involving this topic have been used in many fields within Sciences and Engineering. For this work, a historical survey was made upon it and its origin, which is a result of the personal correspondence exchange between Leibniz and Guillaume L'Hôspital and therefore it has been used until now. The main purpose of this work is to present the great contributions of researchers and experts who were crucial to its development, what has made it possible and kept in constant improvement until the present days. On the other hand, it also revealed that along with these contributions, some controversies were detected. After the historical facts have been exposed, the main definitions and properties necessary to the comprehension of the Fractional Calculus and its effective use by Scientists and Engineers were fully presented and explained here.

Key words: Fractional Calculus. Historical Survey. Fractional Derivatives. Fractional Integral. Fractional Models.

Sumário

Introdução

O Cálculo de ordem inteira está presente nas grades curriculares das universidades em vários cursos como, por exemplo: na engenharia, na matemática, na física, na administração, etc. É, portanto, uma disciplina fundamental, sobretudo, aos cursos que lidam diretamente com a área. Para quem estuda essa área, verifica-se os termos *derivada* e *integral*, os quais são bem conhecidos por alunos que frequentam os cursos já citados.

Diferentemente do cálculo de ordem inteira, tem-se que o Cálculo Fracionário, outrora chamado de Cálculo de Ordem Arbitrária, apesar de existir há bastante tempo, pelo que se sabe, não é tido como disciplina e nem faz parte das grades curriculares. É comum acreditarem que ele não é tão popular, mas esse pensamento não pode ser considerado verdadeiro, pois o cálculo fracionário tem alcançado popularidade e uma importância considerável durante as três últimas décadas, além disso, também tem sido objeto de estudo em todo mundo. Seu progresso continua. O mesmo é utilizado em muitos campos das ciências tais como: reologia, engenharia, teoria do eletromagnetismo, estatística e probabilidade, teoria de transporte difusivo, redes elétricas, dentre outros.

Para mostrar que o Cálculo Fracionário é de grande importância tanto quanto o Cálculo de ordem inteira e que deveria estar presente como disciplina nas universidades, tem-se por objetivo apresentar a sua origem e seu desenvolvimento, que tem sido crescente no mundo todo e, como reflexo disso, verificam-se importantes aplicações em vários campos das ciências.

Primeiramente, é interessante observar o surgimento do Cálculo Fracionário: ocorre a partir da simples troca de correspondências entre dois grandes pesquisadores Leibniz e ℓ'Hôpital em 1695. Na época, esses dois estudiosos, questionaram-se sobre a existência de uma generalização da derivada de ordem inteira para derivada de ordem não inteira. A partir daí surgem pesquisadores interessados no assunto, cada um com sua contribuição, seja no que diz respeito a definições ou aplicações.

Neste trabalho são apresentados esses principais pesquisadores e suas respectivas contribuições, as quais sem dúvida, foram de grande valia para a expansão do Cálculo Fracionário no mundo.

O estudo de derivadas de ordem arbitrária, até os anos de 1819 não aparece na literatura, isso aconteceu só a partir da definição de derivada fracionária de Lacroix. A primeira aplicação é dada por Abel em 1823 quando este usa o Cálculo Fracionário para encontrar a solução de uma equação integral que surgiu em sua formulação do problema da tautócrona.

Assim como nos demais países do mundo, o Cálculo Fracionário também está presente no Brasil. Verifica-se essa temática já sendo apresentada em vários eventos, como congressos e simpósios. Há, por exemplo, muitos estudantes e professores publicando artigos e apresentando trabalhos sobre o assunto.

Por questão terminológica e para ser mais prático, será utilizado ao longo deste texto a sigla CF para se referir ao termo Cálculo Fracionário.

Foram muitos pesquisadores que apresentaram definições de derivadas e integrais fracionárias, não serão apresentadas todas, mas apenas aquelas consideradas mais importantes e mais utilizadas.

Capítulo 1

1 Aspectos Históricos do Cálculo Fracionário desde sua origem até a contribuição de Caputo

Este capítulo tem como objetivo relatar aspectos históricos desde seu início, no ano de 1695, até, aproximadamente, 1970 para, assim, poder se ter conhecimento dos estudiosos que deram sua parcela de contribuição para que o cálculo de ordem arbitrária tivesse se desenvolvido e se tornado importante.

1.1 Troca de correspondências

O cálculo fracionário teve origem na troca de correspondências entre os matemáticos ℓ'Hôpital (1661- Guillaume François Antonie ℓ'Hôpital -1704) e Leibniz (1646- Gottfried Wilhelm Leibniz- 1716), em 30 de setembro de 1695. Atualmente, essa data é considerada como início do CF.

Leibniz formulou uma indagação na primeira correspondência: "pode a derivada de ordem inteira ser generalizada a derivada com ordem arbitrária?" ℓ'Hôpital não respondeu ao questionamento de Leibniz, mas o devolveu com outra questão sobre o caso particular em que a ordem da derivada fosse meio. Como resposta Leibniz disse: "Isso levará a um paradoxo, do qual um dia serão tiradas consequências úteis". Ele assegurava que para $y(x) = x$ a igualdade $d^{\frac{1}{2}}x = x\sqrt[2]{dx : x}$, aparentemente um paradoxo resultaria em consequências importantes.

Devido a pergunta de ℓ'Hôpital ter sido, especificamente, para $n = 1/2$, ou seja, uma fração, isto deu origem efetivamente ao nome deste ramo da matemática, que hoje conhecido como Cálculo Fracionário (CF).

Em 1697, Leibniz troca correspondências também com Wallis (1616- John Wallis-1703), um professor de geometria em Oxford, conhecido como um dos principais matemáticos do século XVII, nas oportunidades, discutia o produto infinito de Wallis para o número π e segundo ele o cálculo diferencial poderia ter sido usado para conseguir esse resultado. Além das correspondências de Leibniz com Wallis e ℓ'Hôpital, houve também troca de cartas com Bernoulli (1667- Johann Bernoulli-1748).

Percebe-se que o CF é tão antigo quanto o Cálculo de ordem inteira, mas foi somente nas últimas três décadas que devido ao grande número de aplicações em vários campos da ciência e da engenharia, que foi despertado o interesse em seu estudo. Entretanto, as dificuldades em se interpretar geométrica e fisicamente as derivadas e integrais de ordem não inteira, contribuiram de forma negativa para o surgimento das aplicações do CF.

1.2 Grandes Contribuições

Pode-se afirmar que a ideia de Leibniz foi um marco inicial que tem motivado muitos matemáticos, físicos e engenheiros a desenvolver o conceito de CF, tanto em teoria quanto em aplicações. Frisa-se que foi a partir de 1695, que muitos estudiosos e cientistas importantes colaboraram para o desenvolvimento do CF, pois objetivavam justificar a resposta positiva dada por Leibniz.

Na Figura 1, apresenta-se, uma linha do tempo dos pesquisadores que contribuiram no período de 1695 a 1970.

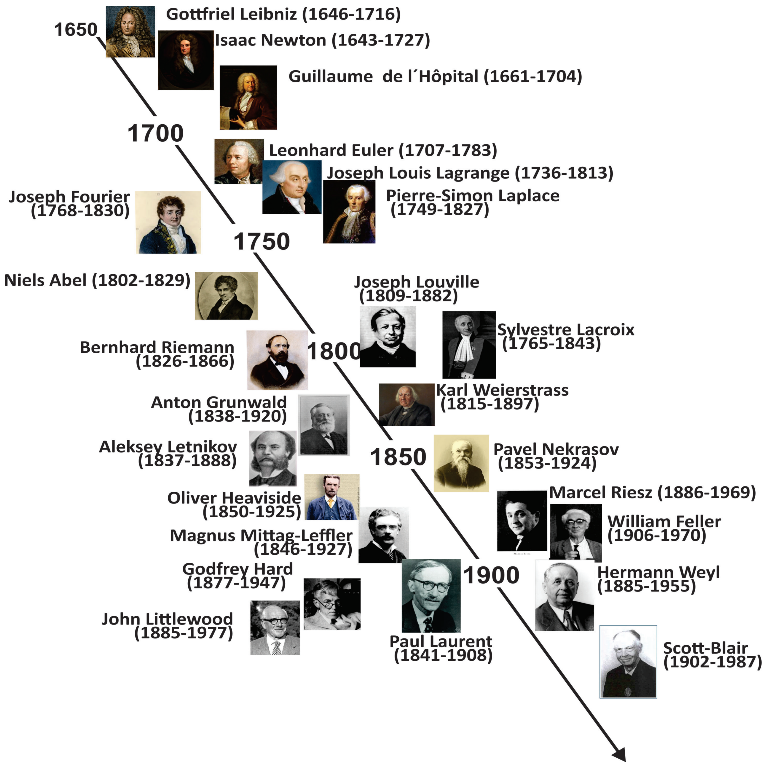

Figura 1: Linha do tempo do cálculo fracionário de 1650 a 1970 [38].

Serão detalhadas as contribuições de alguns estudiosos anteriormente citados. Iniciando por Euler (1707-Leonhard Euler-1783), matemático e físico suiço, que no século XVIII deu sua importante contribuição quando escreve em sua dissertação em 1730: “Quando n é um inteiro positivo e p é uma função de x, a relação $d^n p$ por dx^n pode sempre ser expressa algebricamente, de forma que se $n = 2$ e $p = x^3$, então d^2x^3 por dx^2 é $6x$ por 1. É perguntado: que tipo de relação pode ser feita se $\boldsymbol{n}$ é uma fração? Isto ocorre porque existe uma dificuldade nesse caso. Mas sugere-se que esta dificuldade em se obter a derivada de ordem fracionária poderia ser compreendida com ajuda de interpolações na derivada”.

Em 1772, uma contribuição indireta foi do matemático e astrônomo italiano-francês Lagrange (1736- Joseph Louis Lagrange- 1813) através da lei dos expoentes [5]:

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}}, \tag{1.1}$$

que foi de grande utilidade no desenvolvimento do cálculo, mesmo que tenha sido demonstrado que esta lei não é válida para toda função $y(x)$ quando m e n são arbitrários.

No século XIX, tem-se outras contribuições, Laplace (1749- Pierre Simon de Laplace -1827), matemático, astrônomo e físico francês, definiu uma derivada fracionária por meio de uma integral no ano de 1812 e o matemático francês Lacroix (1765- Silvestre François Lacroix -1843) foi o primeiro a mencionar as derivadas de ordem arbitrária, no ano de 1819, ele fez isto em duas das 700 páginas de seu livro de cálculo.

Lacroix expressou a n-ésima derivada ($n \leq m$) em termos da função gama [1] e, começando com a função $y = x^m$, $m \in \mathbb{Z}_+$, a saber:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}. \tag{1.2}$$

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)\Gamma(m-n+1), \tag{1.3}$$

introduzindo a notação, tem-se:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}. \tag{1.4}$$

Substituindo $m = 1$ e $n = 1/2$ na equação (1.4) ele obteve o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4x}{\pi}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

O método de Lacroix não ofereceu nenhuma pista para possível aplicação da derivada de ordem arbitrária.

O matemático e físico francês Fourier (1768- Jean Baptista Joseph Fourier -1830), em 1822, obteve a representação integral para uma função $f(x)$, a saber:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \cos[t(x-\xi)]dt, \tag{1.5}$$

as derivadas de ordens inteiras n= 1, 2, ... são dadas por:

$$D^n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos\left[t(x-\xi) + \frac{n\pi}{2}\right] dt. \tag{1.6}$$

Substituindo o inteiro n por α, real arbitrário, ele obteve a versão generalizada para as suas derivadas de ordens arbitrárias, equação conhecida como integral de Fourier generalizada.

[1] A função gama é definida como uma integral imprópria em termos de outra função. Ela é uma função complexa de uma variável complexa, $\Gamma : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $Re(a) > 0$, definida da seguinte forma [20]:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt.$$

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha}\cos\left[t(x-\xi)+\frac{\alpha\pi}{2}\right]dt. \tag{1.7}$$

Ele afirma: “o número α que aparece acima pode ser considerado como qualquer quantidade, positiva ou negativa” [5].

Embora alguns estudiosos tenham se dedicado ao estudo do CF, ainda não existia uma aplicação até este momento. Euler e Fourier fizeram referências às derivadas de ordem arbitrária, mas nunca deram nenhuma aplicação ou exemplos. A primeira aplicação do CF coube ao matemático norueguês Abel (1802- Niels Henrik Abel-1829). Ele aplicou na solução de uma equação integral que surge do problema da tautócrona, que também às vezes é chamado de problema isocrônico e, geralmente reivindica-se que ele tenha resolvido. A equação do problema da tautócrona, objetivava encontrar a forma de uma curva plana $f(\eta)$, lisa, passando pela origem em um plano vertical, sujeita a ação da gravidade, e uma partícula de massa m pode cair sobre ela, onde o tempo de descida seja o mesmo, independente da posição inicial. Nesse caso se T é constante, a equação que modela este problema é:

$$\sqrt{2g}T = \int_{0}^{\eta}(\eta-t)^{\frac{-1}{2}}f'(t)dt, \tag{1.8}$$

onde g é aceleração devido a gravidade, (ξ,η) é a posição inicial. A equação (1.8) é equivalente a equação fracionária:

$$f'(\eta) = T\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,{}_0D_{\eta}^{\frac{1}{2}}(1) = \sqrt{\frac{2a}{\eta}}, \qquad a = \frac{gT^2}{\pi^2}, \tag{1.9}$$

onde ${}_0D_{\eta}^{\frac{1}{2}}$ corresponde a derivada fracionária de ordem meio.

Mostra-se que a solução da equação (1.9) é uma ciclóide com vértice na origem e tangente no eixo x. A solução de Abel é baseada no fato de que, a derivada fracionária de uma função constante não é sempre zero, de acordo com Lacroix ${}_0D_{\eta}^{\frac{1}{2}}(1) = (\pi\eta)^{-\frac{1}{2}}$ [5]. Esta solução é considerada por muitos como “elegante”. Lützen (1951- Jesper Lützen) mostrou que Abel nunca resolveu o problema através do CF, mas apenas mostrou como a solução, encontrada por outros meios, poderia ser escrita como uma derivada fracionária. *Lützen* também resumiu brevemente o que Abel realmente fez, ver referência [81].

É possível que Liouville (1809-Joseph Liouville- 1882) tenha sido o primeiro a definir logicamente uma derivada. Seu primeiro estudo consistia em expandir funções em séries de potências e definir a derivada de ordem n fazendo a operação como se n fosse inteiro positivo. Ele definiu a primeira fórmula de Liouville para derivada de ordem arbitrária. Há trabalhos adicionais, Peacock (1791- Gregory Peacock- 1858) em 1853, Gregory (1841), Morgan (1806- Augustus De Morgan- 1871) em 1842, Kelland em 1846 e Center, em 1848. Ele considerou um resultado bem conhecido $D^n e^{ax} = a^n e^{ax}$, $n \in \mathbb{N}$ e estendeu para o caso particular $v = 1/2$, $a = 2$ e ordem arbitrária $v \in \mathbb{R}_+$:

$$D^v e^{ax} = a^v e^{ax}. \tag{1.10}$$

Ele considerou a expansão em série para $f(x)$ como $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$, com a_k constante, $Re(a_k) > 0$, e definiu a derivada de ordem arbitrária v por:

$$D^v f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^v e^{a_k x}. \tag{1.11}$$

Esta derivada é conhecida como a **primeira fórmula de Liouville** para derivada de ordem arbitrária.

Seu segundo método foi aplicado para a função explícita x^{-a}, $a > 0$ [15]. Ele usou a integral $I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$ e fazendo a substituição: $xu = t$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^{a-1} e^{-t} \frac{1}{x} dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{x^a x^{-1}} e^{-t} \frac{1}{x} dt \\
&= \frac{1}{x^a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \qquad Re(a) > 0 \\
&= x^{-a} \Gamma(a).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Da equação (1.12), tem-se:

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du. \tag{1.13}$$

Aplicando $\dfrac{\partial^v}{\partial x^v}$, que corresponde à derivada de ordem v, na equação (1.13) e, consequentemente, admitindo que: $\dfrac{d^v}{dx^v}(e^{-xu}) = (-u)^v e^{-xu}$, $v > 0$:

$$D^v x^{-a} = \frac{d^v x^{-a}}{dx^v} = (-1)^v \frac{\Gamma(v+a)}{\Gamma(a)} x^{-a-v}, \qquad a > 0. \tag{1.14}$$

Esta foi chamada de **segunda fórmula de Liouville** para a derivada de ordem arbitrária, que foi usada em suas investigações da teoria do potencial. Talvez tenha sido a fórmula integral de Fourier e a solução de Abel que tenham chamado a atenção de Liouville, que fez o primeiro grande estudo do CF.

1.3 Algumas controvérsias durante o desenvolvimento do Cálculo Fracionário

Nas definições de Liouville, a primeira é restrita para certos valores de v e a segunda definição não é adequada para certas classes de funções do tipo x^{-a}. Por isso, entre 1835 e 1850 houve controvérsias sobre as duas definições [70]. O matemático inglês Peacock preferiu a generalização de Lacroix enquanto, muitos outros matemáticos deram preferência à definição de Liouville [71]. Em 1848, Center observou discrepância entre as duas versões de Liouville da derivada fracionária focada na derivada fracionária de uma constante. Ele discute também que Lacroix não considerou o caso da função constante. Utilizando $a = 0$ na função $f(x) = x^a$, Center denotou a função constante $f(x) = 1$. E ao calcular a derivada fracionária de ordem 1/2, notou o resultado:

$$D^{\frac{1}{2}} x^0 = \frac{1}{\Gamma(1/2)} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \tag{1.15}$$

A conclusão que Center chegou é que a definição de Lacroix resulta um valor diferente de zero para a derivada fracionária de uma função constante.

Agora calculando a derivada da função constante usando a definição de Liouville:

$$D^{\frac{1}{2}}x^{-a} = (-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(1/2+a)}{\Gamma(a)}x^{-1/2-a}, \tag{1.16}$$

tomando o $\lim_{a\to 0^+}$ e usando $\lim\limits_{a\to 0^+}\Gamma(a) = \infty$, ele obteve o resultado abaixo:

$$D^{\frac{1}{2}}x^{-a} = \lim_{a\to 0^+} D^{\frac{1}{2}}x^{-a} = \lim_{a\to 0^+}(-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(1/2+a)}{\Gamma(a)} = 0. \tag{1.17}$$

Analisando os dois resultados distintos para a derivada de uma constante, Center afirmou: "A questão toda fica claramente reduzida para o que é exatamente $\dfrac{d^\alpha x^0}{dx^\alpha}$" [71].

Em meados do século XIX, as coisas foram esclarecidas. O matemático americano Davis (1892- Harold Thayer Davis- 1974) afirmou: "os matemáticos daquela época estavam apontando para uma definição plausível de diferenciação generalizada, mas deve-se notar que faltavam as ferramentas para analisar as consequências da sua definição no plano complexo".

1.4 As contribuições continuam

O matemático britânico Morgan, em 1840, dedicou três páginas ao cálculo. Ele faz um comentário sobre as duas versões da derivada fracionária de Liouville: "ambos os sistemas podem, muito possivelmente, serem partes de um sistema mais geral, mas no momento eu prefiro ser partidário de ambos" [71].

Em 1847, o matemático alemão, Riemann (1826 - Georg Friedrich Bernard Riemann-1866) contribuiu para o desenvolvimento do CF quando em seu artigo apresentou uma definição para a derivada fracionária. Ele usou a generalização de Taylor para obter uma fórmula para a integral fracionária, conhecida, atualmente, como integral fracionária de Riemann-Liouville. Isso foi publicado em 1982 após sua morte em seu *Gesammelte Werke* [2],

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_c^x (x-k)^{\gamma-1}u(k)dk, \tag{1.18}$$

onde c e x são os limites de integração, γ é a ordem da integração, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $x > 0$ e c constante.

Riemann fez um ajuste adicionando uma função complementar $\psi(x)$ por existir problema no limite inferior de integração c. Esta função complementar foi uma tentativa de se propor uma medida de divergência da lei dos expoentes:

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_c^x (x-k)^{\gamma-1}u(k)dk + \psi(x). \tag{1.19}$$

Mas esta definição se tornou ineficiente devido a introdução dessa função complementar $\psi(x)$. O matemático britânico Cayley (1821- Arthur Cayley -1895), em 1880, observou: "A maior dificuldade na teoria de Riemann, parece-me, é a questão do significado de uma função complementar que contém uma infinidade de constantes arbitrárias". Porém, é importante mencionar que qualquer definição satisfatória de uma operação fracionária vai demandar dificuldade

[2] Coleção de todas suas obras completas.

para ser removida. A definição de Riemann atualmente, é utilizada como definição para integral fracionária com uma notação moderna:

$$({}_cJ_x^\alpha)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{1.20}$$

Na expressão acima, tem-se a fórmula de Riemann quando $c = 0$ e a fórmula de Liouville quando $c = -\infty$.

A existência de uma função complementar causou confusão. Isso já aponta que ideias matemáticas nem sempre são desprovidas de erros. Peacock cometeu vários erros acerca do cálculo fracionário quando aplicou erroneamente o princípio da permanência de formas equivalentes, pois nem sempre se aplica a teoria dos operadores. Ele considerou a existência de uma função complementar e desenvolveu uma expansão para $D^{-m}x$, m inteiro e positivo. O estudioso cometeu erro quando, ingenuamente, concluiu que poderia substituir m por uma fração, como fez Lacroix, que deixou $n = 1/2$ em (1.4).

Peacock cometeu outro erro, quando desenvolveu a expansão para a derivada de ordem inteira $D^m(ax + B)^n$ e estendeu o resultado para o caso geral. Liouville também se equivocou quando não se atentou na sua discussão de uma função complementar que um de seus parâmetros levava ao absurdo. Quanto a Riemann as duas versões diferentes de uma derivada fracionária apresentavam resultados diferentes quando aplicadas a uma constante. Houve uma longa disputa quanto a definição correta da versão Lacroix-Peacock ou da versão de uma derivada fracionária de Liouville. Mais tarde, Cayley notou que Riemann estava realmente enredado em sua versão de uma função complementar.

Em 1848, Hargreave (1820- Charles James Hargreave- 1866) parece ter sido o primeiro a escrever sobre a generalização de Leibniz da n-ésima derivada de um produto [71], que em notação moderna é:

$$D^v[f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix} D^{(n)}f(x)D^{(v-n)}g(x), \tag{1.21}$$

onde v é de ordem arbitrária, D^n é o operador diferencial fracionário de ordem inteira n, $D^{(v-n)}$ é um operador integral fracionário de ordem $v-n$, e $\begin{pmatrix} v \\ n \end{pmatrix}$ é o coeficiente binomial generalizado $\dfrac{\Gamma(v+1)}{n!\Gamma(v-n+1)}$.

A regra de Leibniz generalizada pode ser encontrada em muitas aplicações, para mais detalhes ver referência [72].

Em 1858, Greer escreveu sobre derivada fracionária por meio de diferenças finitas. Através da equação (1.10), ele obteve fórmulas para derivadas fracionárias de funções trigonométricas [60]:

$$D^\alpha e^{iax} = i^\alpha a^\alpha \left(\cos(ax) + i\,\mathrm{sen}(ax)\right), \tag{1.22}$$

$$D^\alpha e^{iax} = a^\alpha \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\left(\cos(ax) + i\,\mathrm{sen}(ax)\right). \tag{1.23}$$

Derivada fracionária de $\cos(ax)$:

$$D^{\alpha}(\cos(ax)) = a^{\alpha}\left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos(ax) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}(ax)\right) = a^{\alpha}\cos\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{1.24}$$

Derivada fracionária de sen(ax):

$$D^{\alpha}(\operatorname{sen}(ax)) = a^{\alpha}\left(\cos(ax)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + \operatorname{sen}(ax)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) = a^{\alpha}\operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{1.25}$$

Para $\alpha = 1/2$ e $a = 1$, tem-se respectivamente:

$$D^{1/2}\cos(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \tag{1.26}$$

$$D^{1/2}\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.27}$$

Em 1861, Zachartchenxo melhorou o trabalho de Greer e termina seu artigo com uma brincadeira: "Eu sei que Liouville, Peacock e Kelland escreveram sobre este tema, mas não tive oportunidade de ler as suas obras" [71].

Grünwald (1838-Anton Karl Grünwald- 1920), professor de matemática na Faculdade Politécnica da Alemanha, juntamente com Krug, unificaram os resultados de Riemann e Liouville. Em 1867, Grünwald, perturbado pelas restrições da abordagem de Liouville, usa como ponto de partida a definição de um derivada como o limite de um quociente da diferença e chegou a fórmulas de integrais definidas para a n-ésima derivada [55].

Grünwald mostrou que uma integral definida de Riemann deve ser interpretada como tendo um limite inferior finito. Ele introduziu a ideia de derivada fracionária como limite de uma soma dada por [5]:

$$D^{\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{\Gamma(\alpha+1)f(x-jh)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}. \tag{1.28}$$

Holmgren (1822- Hjalmar Joseph Holmgren- 1885), em 1868, escreveu 58 páginas sobre aplicação de CF para soluções de algumas equações diferenciais. No início do seu trabalho ele afirma que Liouville e Spitzer obtiveram resultados muito restritos e que seu objetivo é encontrar uma solução completa e não sujeita às restrições tais como a de Liouville e Spitzer.

Em 1868, a contribuição de Letnikov (1837- Aleksey Vasilievich Letnikov -1888), matemático russo, foi o estudo sobre a lei dos expoentes que mostrou para ordens arbitrárias as condições para que a expressão abaixo fosse válida [5]:

$$[D^{q}D^{p}f(x)]_{x_0}^{x} = [D^{q+p}f(x)]_{x_0}^{x}. \tag{1.29}$$

Grünwald e Letnikov introduziram uma definição para a derivada fracionária chamada, hoje, de *Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov* [14]:

$${}_{a}D_{t}^{\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\alpha}}\sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]}(-1)^{j}\begin{pmatrix}\alpha\\ j\end{pmatrix}f(t-jh), \tag{1.30}$$

onde $\left[\frac{t-a}{h}\right]$ representa a parte inteira de $\frac{t-a}{h}$, $t \in \mathbb{R}$ e $h > 0$.

Em 1869, Sonin (1849- Nikolay Yakovlevich Sonin -1915) escreveu o primeiro trabalho que, atualmente, chama-se de formulação da derivada fracionária. Seu artigo é intitulado: "On differentiation with arbitrary index". Ele tomou como ponto inicial a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n de uma função analítica. O trabalho dele foi estendido por Letnikov em seu artigo cujo título é: "An explanation of the fundamental concepts of the theory of differentiation of arbitrary order". Em 1868 a 1872 escreveu quatro artigos, cujo tema principal era a generalização da fórmula integral de Cauchy. Sonin e Letnikov definiram uma derivada fracionária e usaram contorno fechado.

Muitos estudos sobre operadores fracionários são baseados na fórmula integral de Cauchy. Dentre eles, os trabalhos de Letnikov (1868), Laurent (1884) e Heaviside (1892).

Em 1884, Laurent (1813 - Pierre Alphonse Laurent -1854), matemático francês e oficial militar, publicou o que atualmente é reconhecido como o artigo definitivo sobre os fundamentos do cálculo fracionário. Sua publicação foi feita após ter discutido os trabalhos de Sonin e Letnikov sobre operadores generalizados. Em vez de usar contorno fechado, ele usou contorno aberto em uma superfície de Riemann [5]. Usando a fórmula integral de Cauchy para funções analíticas com valores complexos e uma simples mudança de notação de um valor ν negativo para um valor ν positivo ele introduziu a definição de integral de ordem arbitrária ν:

$$ {}_aD_x^{-\nu} f(x) = {}_aJ_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt. \tag{1.31} $$

Tem-se que ${}_aD_x^{-\nu} \equiv {}_aJ_x^{\nu}$ é o operador integral de Riemann-Liouville. Quando $a = 0$ tem-se a expressão que é a atual definição de integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville:

$$ {}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \qquad Re(\nu) > 0. \tag{1.32} $$

A definição apropriada da diferenciação de ordem arbitrária é a integral, a partir da qual, o resultado pode ser obtido por diferenciação ordinária [15]. Deixar $\nu = m - \rho$ onde m é o menor inteiro maior que ν e $0 < \rho \leq 1$:

$$ {}_aD_x^{\nu} f(x) = {}_aD_x^{m-\rho} f(x). \tag{1.33} $$

Então, segue:

$$ {}_aD_x^{m-\rho} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} [{}_aD_x^{-\rho} f(x)], \tag{1.34} $$

consequentemente:

$$ \frac{d^m}{dx^m} \left[{}_aD_x^{-\rho} f(x)\right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_a^x (x-t)^{\rho-1}\right] f(t)dt. \tag{1.35} $$

Em 1888, o matemático russo Nekrasov (1853- Pavel Alekseevich Nekrasov-1924) e o matemático alemão Krug obtiveram a definição fundamental da equação (1.31) através da fórmula integral de Cauchy por meio de um método, que é diferente daquele usado por Sonin e Letnikov, na escolha do contorno de integração [71].

Embora muitos pesquisadores usaram os operadores generalizados, foi o matemático inglês e engenheiro eletricista, Heaviside (1850- Oliver Heaviside -1925) que com suas aplicações acelerou, em 1892, o desenvolvimento desses operadores [5]. Ele, através de seus métodos, mostrou que certas equações diferenciais lineares podem ser resolvidas através de operadores generalizados. Os métodos usados por ele foram úteis para engenheiros resolverem problemas em física-matemática sobre teoria da transmissão de correntes elétricas em cabos. Esses métodos foram coletados sob o nome de cálculo operacional de Heaviside, pois foi desenvolvido por ele para resolver certos problemas da teoria do eletromagnetismo. Seus estudos sobre potencial e linhas de transmissão elétrica introduziram a ideia de derivadas fracionárias.

No mesmo ano, o matemático francês Hadamard (1865- Jacques Salomon Hadamard -1963) publica um artigo sobre derivada de ordem não inteira de uma função analítica em termos de sua série de Taylor.

Entre 1889 e 1905, o matemático sueco Mittag-Leffler (1846- Magnus Gösta Mittag-Leffler -1927) deu uma importantíssima contribuição ao desenvolvimento do CF. Ele publicou uma série de artigos denominado por ele como: "Notas" sobre o somatório de séries divergentes, cujo objetivo era construir a continuação analítica de uma série de potência fora de seu círculo de convergência. Mittag- Leffler introduziu e investigou em cinco artigos consecutivos uma nova função especial, que até os dias de hoje é muito popular e útil para muitas aplicações. Esta função é chamada de função de Mittag-Leffler [5]. Segue a clássica função e suas generalizações com dois e três parâmetros:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \tag{1.36}$$

onde $E_\alpha(z)$ é uma função complexa que depende de α, parâmetro complexo, $Re(\alpha) > 0$.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad Re(\alpha) > 0, \qquad Re(\beta) > 0 \tag{1.37}$$

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \tag{1.38}$$

onde $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ e $Re(\alpha) > 0$, e $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer, que é usado com objetivo de tornar mais simples um particular quociente envolvendo funções gama.

As contribuições para o desenvolvimento do CF não acabaram por aí, mas se comparados os períodos de 1900 a 1970 e 1971 a 1995, percebe-se que, de 1900 a 1970, o CF teve seu desenvolvimento menos intenso.

Na primeira década do Século XX, destacam-se muitos colaboradores para o desenvolvimento do CF, dentre eles: Pincherle (1853- Salvatore Pincherle -1936) matemático italiano, Hardy (1877- Godfrey Harold Hardy -1947), matemático inglês e Weyl(1885- Hermann Klaus Hugo Weyl -1955), matemático alemão. Sendo o último responsável por outra definição para a integral de ordem arbitrária atualmente conhecida como derivada fracionária de Weyl:

$$D[W^\alpha f(t)] = W^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x+t)dx. \tag{1.39}$$

Tem-se também que os resultados de Heaviside não lograram êxito em serem justificados apesar de estarem corretos. A falta de rigor em seus trabalhos deve-se ao fato de que ele era um cientista inexperiente. Mas, o matemático inglês Bromwich (1875- 1875- Thomas John Ianson Bromwich -1929) formalizou seus resultados e conseguiu justificá-los em 1919.

Em 1920, Heaviside introduziu a diferenciação fracionária em sua investigação da teoria das linhas de transmissão. Em 1924, o engenheiro Berg (1871- 1871-Ernst Julius Berg -1941) utilizou os operadores de Heaviside na Engenharia e Física.

Em 1925, Hardy (1877- Godfrey Harold Hardy -1947) e Littlewood (1885- John Edensor Littlewood -1977) conseguem obter alguns resultados das integrais fracionárias, através dos operadores de Heaviside. Em 1927, Marchaud (1887-André Marchaud -1973) definiu a derivada fracionária de ordem arbitrária α [14]:

$$ {}_0D^{\alpha}_{\infty}f(x) \equiv {}_0I^{-\alpha}_{\infty}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^{\infty} u^{-\alpha-1}f(x-u)du, \qquad \alpha > 0. \tag{1.40} $$

Porém, a representação acima diverge para $u^{-\alpha-1}$ na origem. Por isso, a definição foi modificada para $0 < \alpha < 1$. Com algumas operações, resultou no que é chamado de definição de Marchaud:

$$ {}^{+}_{o}D^{\alpha}_{x}f(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\epsilon}^{\infty} u^{-\alpha}f'(x-u)du = {}_{-\infty}I^{1-\alpha}_{x}f'(x). \tag{1.41} $$

O matemático polonês Post (1897- Emil Leon Post- 1954), em 1930, usou quocientes de diferenças para estender a definição de derivada arbitrária de Grünwald e para definir a diferenciação para operadores generalizados. Esta definição, atualmente, é chamada de derivada de ordem arbitrária de Grünwald, sendo esta muito eficiente na resolução de problemas numéricos.

Em 1935, Gemant (1895- Andrew Gemant -1983) físico austro-húngaro, desenvolveu o conceito de viscosidade complexa, ou seja, de uma relação entre deformação e tensão que é dinâmica, de modo que a deformação depende da história passada da tensão aplicada [79]. Para isso, ele usou a função de transferência fracionária abaixo:

$$ \eta' = \frac{\eta_0}{1+(\omega\tau_0)^{3/4}} \tag{1.42} $$

onde η_0 é a viscosidade estacionária, η' é a viscosidade dinâmica e ω é a frequência.

A função de transferência acima foi publicada pela primeira vez em uma série de artigos em 1941-1943, até então, foi a primeira relação proposta sobre viscoelasticidade.

Em 1939, Erdélyi (1908- Arthur Erdélyi -1977), matemático britânico, propõe uma modificação nos operadores de Riemann-Liouville. Hoje chama-se de operadores de Erdélyi-Kober a forma mais geral destes operadores. Tem-se, nesse periódo, de 1936 a 1940, muitos colaboradores para o CF, eles são: Davis, Kober, Stullof, Kuttner, Hirschmann, Lions e Buschman.

Em 1944, o químico Blair (1902- George William Scott Blair- 1987) é um dos criadores da Reologia, ou seja, a ciência da deformação e fluxo de matéria. Blair propôs o uso da derivada fracionária na relação entre a tensão e a deformação de um meio material [79].

Em 1949, Riesz (1886- Marcel Riesz -1969) que era matemático húngaro, professor e reitor da Universidade de Szeged, formulou a definição de integral fracionária [14]:

$$ R^{\alpha}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^{\alpha}\pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{\mid x-u\mid^{n-\alpha}}du, \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{1.43} $$

Para $n = 1$ segue:

$$R^{\alpha}f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos[\alpha\pi/2]}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u)}{\mid x-u\mid^{1-\alpha}}du, \qquad 0<\alpha<1, \tag{1.44}$$

que é chamada de potencial de Riesz de ordem α, que generaliza a integral de Riemann-Liouville.

Em 1965, Cooke generaliza os operadores integrais de Erdélyi-Kober e mostra a sua utilidade para obter soluções de equações integrais na eletrostática.

A primeira monografia publicada foi em 1968 sobre CF aplicado a Química elaborada por Oldham e Spanier [56].

Em 1969, Caputo (1927 - Michele Caputo) propôs uma nova definição para derivada de ordem arbitrária definida por:

$$D_*^{\beta}f(x) = {}_cJ_x^{\alpha}[D^n f(x)]. \tag{1.45}$$

onde D_*^{β} é o operador diferencial de ordem β, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ${}_cJ_x^{\alpha}$ é o operador integral de ordem α e limites de integração c e x.

Ele propôs uma importante mudança na definição da derivada fracionária, que é definida da seguinte forma [15]:

$$D_*^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau, \qquad m-1<\alpha<m \tag{1.46}$$

onde α é a ordem da derivada e m deve ser o menor número inteiro maior que α. Esta definição é muito importante na resolução de uma equação diferencial fracionária, cuja solução satisfaz condições de contorno.

Esta proposta foi sugerida devido ao fato de uma equação diferencial fracionária, modelada por um operador fracionário de Riemann-Liouville, exigir condições iniciais e de fronteira também de ordem fracionária, o que gerou diversas discussões naquela época.

Caputo observou através das transformadas de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville, que invertendo as ordens de integração e derivação, a condição inicial seria descrita pelas derivadas de ordem inteira, no ponto inicial, cujas interpretaçoes físicas são conhecidas. Com sua definição, apresentada em 1969, Caputo resolveu um problema de viscoleasticidade. Apesar de ser restritiva, é mais adequada na resolução de problemas físicos.

Muitos pesquisadores contribuíram para a história do CF. Cada pesquisador buscou uma definição e diferentes abordagens para a diferenciação e integral de ordens não inteiras. Essas definições e propriedades podem ser encontradas em [59].

Capítulo 2

2 Aspectos Históricos do Cálculo Fracionário dos anos 70 até hoje

Apresentam-se neste capítulo os aspectos históricos do CF dos anos 70 até os dias atuais, assim como também são destacadas as contribuições no Brasil. São apresentados livros publicados, conferências, periódicos, dentre outros.

2.1 O desenvolvimento do Cálculo Fracionário a partir de 70

Em 1970, o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária passou por uma aceleração. Osler (1940- Thomas Osler), além de estudar a regra do produto de Leibniz:

$$D^{\alpha}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}[D^{k}f(x)][D^{\alpha-k}fg(x)], \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

provou uma generalização da regra do produto na forma integral [4]:

$$D_x^{\alpha}[f(x)g(x)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma-r+1)\Gamma(\gamma+r+1)}[D_x^{\alpha-\gamma-r}f(x)][D_x^{r+\gamma}g(x)]. \tag{2.2}$$

onde γ é uma constante arbitrária.

Em 1974, aconteceu a primeira conferência internacional sobre CF e suas aplicações, realizada na universidade de New Haven e organizada por Ross (1917- Bertram Ross- 1993), pouco tempo depois de sua tese de Phd relacionada ao CF. Dentre os objetivos da conferência, o principal era divulgar o tema, de modo que pesquisadores fossem motivados a inseri-lo em suas pesquisas. O evento foi uma importante contribuição no século XX, a qual alcançou o seu objetivo, pois impulsionou o aumento de pesquisadores voltados para o CF, estimulando, assim um maior número de publicações. Nessa conferência a solução de Abel foi tida como "elegante" [44].

Em 1979 foi publicada a primeira tese de doutorado por Bagley (1948- Ronald Laird Bagley- 2017), orientada por Torvik. O tema da tese relaciona-se com equações diferenciais de ordens arbitrárias na modelagem de comportamento de materiais viscoelásticos [2].

Em 1984, dez anos após a primeira conferência, devido ao seu sucesso, foi realizada a segunda conferência internacional na University of Stratchcly, Glasgow, Escócia. Ainda neste ano, Nishimoto dá início a publicação de vários trabalhos [51, 52, 53, 54] dedicados as aplicações do CF.

Em 1987, na União Soviética, três matemáticos escrevem um livro de CF, são eles: Samko (1941- Stefan Grigorievich Samko), Marichev (1945- Oleg Igorevich Marichev) e Kilbas (1948- Anatoly Alexandrovich Kilbas -2010). O livro com o título *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, primeiramente, escrito em russo e logo após traduzido para o inglês.

A terceira conferência internacional foi realizada em 1989, na Universidade de Nihon, por razão do aniversário da Universidade que fica em Tokyo, Japão. No evento foi proposto aos participantes da conferência, o seguinte problema: *O que é a dimensão fracionária do metrô de Tokyo?* [60].

Em 1990, Kalla (1938- Shyam Lal Kalla) e Kiryakova (1952- Virginia Kiryakova) assinaram vários trabalhos e discutiram operadores fracionários integrais mais gerais [60].

Em 1991, Nishimoto obteve uma nova demonstração do produto de Leibniz para funções analíticas $f(z)$ e $g(z)$ e, para isso, fez uso da integral de Cauchy. Ele ainda fez contribuições significativas, ao inserir a definição e propriedades de funções advindas do CF, com uma e várias variáveis.

Em 1991, o livro de Samko-Kilbas-Marichev foi traduzido para o inglês, a partir desta data, em vários lugares do mundo, outros livros começam a ser publicados.

Em 1993, Miller (1922- Kenneth Miller -2005) e Ross publicaram o livro: *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* [69], que atualmente é considerado como clássico e apresenta uma introdução às equações diferenciais fracionárias. Eles fizeram uma estimativa sobre a quantidade de publicações no assunto e afirmam existir mais ou menos 400 documentos referentes ao CF até o ano de 1993.

Em 1993, a equação de difusão tempo-fracionária no sentido de Caputo é estudada usando duas funções introduzidas pelo físico Mainardi (1942- Francesco Mainardi) em 2010, são elas: $F_v(z)$ e $M_v(z)$, sendo $0 < v < 1$, que são casos particulares da função Wright do segundo tipo [62]:

$$W_{\lambda,\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n + \mu)}, \qquad \lambda > -1, \qquad \mu, z \in \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Atualmente, a função M-Wright $M_v(z)$, também é referida como a Função Mainardi.

Em 1993, o professor Mainardi apresenta pela primeira vez as duas funções $F_v(z)$ e $M_v(z)$, no IUTAM Symposium on Nonlinear Waves in Solids, realizado na Universidade de Victoria, Canadá. Mas, foi na 7ª Conference on Waves and Stability in Continuous Media (WASCOM), em Bolonha, Itália, que ele apresentou mais detalhadamente a função M-Wright [62].

Mainardi aproveitou quatro eventos internacionais, realizados em 1994, para apresentar a função M-Wright. Foram estes:

- 2° International Scientific School-Seminar: Dynamics and Stochastic Wave Phenomena, realizado em Nizhny Novgorod, Russia, 21-28 de junho de 1994. Sua contribuição só foi publicada no ano seguinte, através do artigo *The time fractional diffusion-wave equation* [48];

- International Summer School on Fractal and Hyperbolic Geometry, realizado em Bordeaux, França, 3-8 de julho de 1994. Nessa ocasião, ele conhece o professor Gorenflo (1930- Rudolf Gorenflo -2017) e os mesmos dão início a uma colaboração de sucesso, pois os dois contribuíram substancialmente para o desenvolvimento e aplicações do cálculo fracionário e apresentaram seus resultados em muitas conferências internacionais [43];

- IMACS World Congress on Computation and Applied Mathematics, realizado na Georgia, Atlanta, Estados Unidos, 11-15 de julho de 1994. Neste mesmo ano é publicado o artigo *Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena* [49];

- 1° International Workshop Transform Methods and Special Functions- TMSF, realizado em agosto de 1994, em Sofia, Bulgária. O artigo [50] é publicado no ano seguinte.

Em 1994, Kolwankar (Kiram Kolwankar) e Gangal (Anil Gangal) definem a derivada fracionária local como uma explicação para o comportamento da função "contínua mas não diferenciável". Para $0 < q < 1$ a derivada fracionária local no ponto $x = y$, para $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ [37]:

$$D^q f(y) = \lim_{x \to y} \frac{d^q[f(x) - f(y)]}{d(x - y)^q}. \tag{2.4}$$

Em 1996 foram publicados alguns livros, dentre eles: o livro de Boris-Rubin que apresenta o desenvolvimentodo cálculo fracionário de funções de uma e várias variáveis, e o livro de Hilfer que apresenta uma estimativa do número de artigos produzidos de 1975 a 2000, mais ou menos 600 artigos sobre cálculo de ordem arbitrária [5].

Existia a falta de uma interpretação geométrica evidente para a derivada fracionária, mas Lorenzo (Carl Lorenzo) e Hartley (Tom Hartley), em 1998, aproveitaram-se deste fato e então propuseram, através da análise numérica, uma interpretação usando a definição de Gr$\ddot{u}$nwald-Letnikov.

Há uma interpretação geométrica convincente dada por Heymans (Nicole Heymans) e Podlubny (Igor Podlubny), a respeito da derivada e integral fracionárias [24]. Podlubny inicia uma interpretação simples e realmente geométrica de vários tipos de integração de ordem fracionária: a integração fracionária de Riemann-Liouville à esquerda e à direita, o potencial de Riesz e o potencial de Feller. Outra, é a interpretação física para as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo, e apresenta uma abordagem da interpretação geométrica da integração fracionária que pode ser usada para fornecer uma nova interpretação geométrica e física para convolução de integrais do tipo Volterra [64].

Machado (1957- José Antonio Tenreiro Machado) propôs uma interpretação probabilística da derivada de ordem fracionária, baseada na definição de Gr$\ddot{u}$nwal-Letnikov [40].

Em 1998, Kiryakova dá início a revista FCAA- Fractional Calculus and Applied Analysis. A ideia de criar uma revista surgiu na conferência TMSF' 96, devido ao fato de que, na mesa redonda da sessão "Physical and Geometrical Meanings and Applications of Fractional Calculus Operators", foram discutidas as necessidades de um fórum para publicações na área de CF, para troca de ideias, divulgações, problemas abertos, notícias, etc [43].

Segundo Kiryakova, "A FCAA foi concebida como complemento e continuação dos periódicos existentes e dos trabalhos das conferências internacionais do CF (até 1996), para ser uma casa acolhedora para aqueles que estão ansiosos para se juntar à "família de fracionários e analistas em aplicações"" [43].

Em 1999, Podlubny publica o livro *Fractional differential equations: mathematics in science and engineering* [63], onde apresenta diversas aplicações do CF.

Em 2000, Mainardi e alguns colaboradores criam o site: www.fracalmo.org, cuja origem do domínio vem das iniciais da expressão: **FRA**ctional **CAL**culus **MO**delling. O site foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores interessados nos processos de modelagem em ciências aplicadas (física, engenharia, finanças, biologia, etc.) através de métodos matemáticos baseados em cálculo fracionário [28].

Em 2003, um livro é publicado por West-Bologna-Grigolini, este descreve como os fenômenos que envolvem os fractais transformam-se com o decorrer do tempo, utilizando metodologia surgida no CF. Em 2005, foi publicado por Zaslavsky um livro dedicado a modelos fracionários de cinética anômala de processos complexos. Em 2006, foi publicado o livro de Kilbas-Srivastava-Trujillo, onde encontram-se várias aplicações da teoria do cálculo integral e diferencial. Este livro pode ser utilizado até mesmo para o ensino em nível de pós-graduação. Em 2007, o livro escrito por Sabatier, Agrawal e Machado apresenta o estado da arte no estudo de sistemas fracionários e a aplicação da diferenciação fracionária [73].

Em 2008, Kiryakova publica o artigo "A brief story about the operators of the generalized fractional calculus" [27], que aborda a contribuição de Kalla sobre CF generalizado.

Em 2011, a conferência internacional "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis- OTHA-2011", realizada em Rostov-on-Don, Russia, é dedicada ao professor Samko [3]. Será usada a sigla OTHA, para fazer menção a essa conferência que será citada mais de uma vez.

Ainda neste ano, Meerschaert e Sikorskii publicam o livro: *Stochastic Models for Fractional Calculus*, que aborda o CF e difusão anômala, usando ideias de probabilidade. O objetivo é preparar alunos de pós-graduação em probabilidade, para pesquisas nessa área, pois muitos problemas interessantes permanecem abertos.

Em maio de 2012 é realizado na Universidade Hohai, em Nanjing, China, "5° Symposium on Fractional Differentiation and Its Application (FDA' 2012)". O slogan do simpósio era: "Ser desafiado, motivado e inspirado". O evento FDA, que inicialmente era realizado a cada dois anos, como workshops, realizados na França (2004), Portugal (2006), Turquia (2008) e Espanha (2010), a partir de 2012 transformou-se em simpósio [35].

Em agosto de 2012 acontece o "International Congress in Honour of Professor Srivastava (1940- Hari Mohan Srivastava)", em Bursa, Turquia. A realização deste evento foi motivada devido ao sucesso do congresso: "International Congress Dedicated to Professor Srivastava", realizado em 2010, também em Bursa, por ocasião do aniversário de 70 anos de Srivastava [4].

Em setembro de 2012 foi realizado em Kos, Grécia, o evento "ICNAAM 2012, The 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics". Dentre as sessões dedicadas ao CF, citam-se: Applied Studies of Fractional Differential Equations; Fractional Calculus and Applications e Differential Equations and Numerical Methods. No mesmo mês, acontece "AMADE–2012, The 7th International Workshop Analytical Methods of Analysis and Differential Equations", em Minsk, Belarus. O Workshop continua com as tradições das conferências anteriores "Boundary Value Problems, Fractional Calculus and Special Functions"

[3]Os estudos de alguns problemas em sua tese de doutorado, como exemplo, a equação integral generalizada de Abel, levam Samko ao CF. Uma curta, mas importante colaboração com Ross foi, que ambos introduziram e estudaram integrais fracionárias do tipo Riemann-Liouville com ordem variável, que podem ser consideradas como as primeiras etapas do professor Samko, em direção à sua área de pesquisa nas últimas duas décadas, conhecida como Análise de Exponentes Variáveis [31].

[4]O Professor Srivastava é um especialista bem conhecido na área de CF e outros tópicos, possui uma longa lista de livros publicados; enciclopédia; trabalhos em conferências internacionais e mais de 1000 artigos de revistas científicas. Mais detalhes podem ser encontrados nos sites: http://www.math.uvic.ca/faculty/harimsri/ e http://degruyteropen.com/people/srivastava/.

(1996) e AMADE - 1999, 2001, 2003, 2006, 2009, cujo organizador principal era o professor Kilbas.

Neste mesmo ano, Rogosin (Sergei Rogosin) publica o livro *Analytic Methods of Analysis and differential equations, AMADE-2011* [67], dedicado a memória do professor Kilbas. São coletados neste livro, artigos de seus alunos e pesquisadores de vários países, que trabalharam em cooperação com o professor. O livro é interessante para pesquisadores, estudantes de doutorado e mestrado, nas áreas: análise matemática, equações diferenciais e aplicações em mecânica e física matemática [35].

Em 2013, Potapov e Chernykh, publicam o livro "Fractional Calculus of A. V. Letnikov in Physics of Fractals"[65]. Letnikov publicou todas as obras em russo. Infelizmente, esses trabalhos permaneceram desconhecidos nos demais países da Europa e quase foram esquecidos na Rússia. A base para este livro, é o fato de que, Letnikov teve um papel fundamental no desenvolvimento do CF, e que as integrais e derivadas fracionárias têm ampla aplicação na teoria dos fractais. O livro contém alguns dos principais resultados da Escola Científica de Fractais de Moscou, cujo fundador é Potapov [35].

Em 2013 é realizado na França, o sexto workshop: "IFAC Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications". O evento tinha como objetivo reunir especialistas na área de sistemas e controle, para trocar novas idéias, discutir novas tendências e promover interações entre vários campos.

Acontece também em 2013, em Zurich, Suíça, "ECCC' 2013, European Control Conference 2013", com uma sessão especial: Fractional Dynamical Systems and Signals. O objetivo desta sessão especial era reunir pesquisadores no campo do CF, a fim de apresentar os últimos resultados em sistemas dinâmicos fracionários e domínio de sinais. A sessão abrangeu tópicos como: modelagem fracionária, especialmente, sistemas térmicos, sistemas elétricos, materiais dielétricos, sistemas eletroquímicos, sistemas mecânicos e sistemas biológicos; implementação de sistemas (controladores fracionários e implementação de filtros); Controle (PID fracionário, CRONE) [36].

Em novembro de 2013, Pagnini (Gianni Pagnini) e Scalas (Enrico Scalas) organizaram o workshop "Fractional Calculus, Probability and Non-local Operators: Applications and Recent Developments", em Bilbao, Espanha. O workshop foi dedicado a Mainardi, devido a ocasião de sua aposentadoria. Foi feito um convite especial a Caputo e Gorenflo, mas por motivos de saúde não compareceram ao evento [28].

Em 2014 é realizada em Catania, Itália, a conferência internacional: "Fractional Differentiation and Applications- ICFDA 2014. Mainardi foi quem propôs e presidiu a sessão especial "Fractional Calculus: Quo Vadimus? (Where are we going?)". Algumas contribuições foram apresentadas pessoalmente e outras foram enviadas depois, por pesquisadores que não puderam participar da conferência. Os slides originais podem ser encontrados no site: www.fracalmo.org/QUO-VADIMUS. O artigo [43] apresenta uma síntese desses trabalhos contendo as opiniões de vários pesquisadores sobre a questão: Quo Vadimus?. São eles: Chen (YangQuan Chen), Diethelm (Kai Diethelm), Fabrizio (Mauro Fabrizio), Garra (Roberto Garra), Garrappa (Roberto Garrappa), Hermann (Richard Hermann), Hilfer (Rudolf Hilfer), Ionescu (Clara Mihaela Ionescu), Kiryakova, Luchko (Yuri Luchko), Machado, Magin (Richard Magin), Mathai (Arakaparampil Mathai), Meerschaert (Mark Meerschaert), Del-Castillo-Negrete (Diego Del-Castillo-Negrete), Nigmatullin (Rashid Shakirovich Nigmatullin), Orsingher (Enzo

Orsingher), Ortigueira (Manuel Duarte Ortigueira), Oustaloup (Alain Oustaloup), Sabatier (Jocelyn Sabatier), Trujillo (Juan José Trujillo), Venturi (Daniele Venturi) e Karniadakis (George Em Karniadakis).

Em junho de 2015 é realizado o Mini-simpósio "Fractional Calculus and Probability", no congresso AMMCS – CAIMS 2015. Em uma das sessões especiais foram apresentados os resultados matemáticos, com ênfase nas aplicações, relacionados aos processos de Lévy, que são úteis na modelagem de vários sistemas em física, geofísica e biologia [29].

Em 2015, na quinta conferência OTHA, a sessão "Integral transforms and special functions" foi dedicada em memória ao professor Kilbas [29].

Dentre outros eventos no ano de 2015, estão: 7° Conference on Non-integer Order Calculus and its Applications (RRNR 2015), realizada em Szczecin, Polônia; International Symposium on Fractional Signals and Systems (FSS 2015), realizado em Cluj-Napoca, Romênia.

Em abril de 2016, a sexta conferência OTHA-2016 foi dedicada aos 75 anos do professor Samko. A conferência estava relacionada as várias áreas da matemática: análise harmônica, análise funcional, teoria dos operadores, teoria das funções e equações diferenciais e análise fracionária [30].

Em maio de 2016 foi realizado o "Workshop Fractality and Fractionality", na universidade de Leiden, Holanda, organizado por Yuliya Mishura, Georgiy Shevchenko, Peter Spreij, Grygoriy Torbin e Martina Zähle . A conferência teve como finalidade reunir importantes especialistas de diversas áreas envolvendo o CF; estimular a troca de ideias científicas entre diferentes pesquisas e iniciar novas colaborações entre pesquisadores de diferentes países e comunidades de pesquisa. O tema do Workshop surgiu do fato de que, em todo o mundo há grande interesse em pesquisas relacionadas a fractais [32], pois esses aparecem nas ciências naturais, geofísica, cristalografia, astronomia, biologia, química, bioinformática, matemática e outros campos.

Em julho de 2016 foi realizada em Nova Sad, Sérvia, a conferência internacional ICFDA'16. Deu-se continuação a discussão anterior *Fractional Calculus: Quo Vadimus? (Where are you going?)* da conferência ICFDA'14, através da mesa redonda *Fractional Calculus: D'où Venons- Nous? Que Sommes- Nous? Où Allons-Nous?*. Pesquisadores que contribuíram com suas opiniões: Atanacković (Teodor Atanacković), Baleanu (Dumitru Baleanu), Chen (Yang-Quan Chen), Malti (Rachid Malti), Melchior (Pierre Melchior), Lanusse (Patrick Lanusse), Victor (Stéphane Victor), Oustaloup, Diethelm, Ionescu, Garrappa, Popolizio (Marina Popolizio), El-Khazali (Reyad El-Khazali), Kiryakova, Li (Changpin Li), Luchko Machado, Mainardi, Nigmatullin, Ortigueira, Spasić (Dragan Spasić), Stanković (Bogoljub Stanković) e Tarasov (Vasily Tarasov). Suas contribuições podem ser encontradas em [42].

Em outubro de 2016 aconteceu o "Workshop on Future Directions in Fractional Calculus Research and Applications", na universidade de Michigan, EUA, organizado por Meerschaert (Mark Meerschaert). A participação no evento era exclusivamente através de convite, dentre os convidados estavam: West (Bruce West), Sikorskii (Alla Sikorskii), Lenzi (Ervin Lenzi), ZhenQing Chen, Magin, Ionescu, Zhou (Zhi Zhou), Mohsen Zayernouri, Mark Ainsworth, Laskin (Nick Laskin), Li, Wang (Hong Wang), Du (Qiang Du), Nane (Erkan Nane), Toniazzi (Lorenzo Toniazzi), Fedotov (Sergei Fedotov), Sibatov (Renat Sibatov), Sun (HongGuang Sun), Karniadakis (George Karniadakis), Bohannan (Gary Bohannan), Chen, Machado, Scalas, Meerschaert, Bolster (Diogo Bolster), Schumer (Rina Schumer), Deng (Weihua Deng), Voller (Vaughan Voller) e Zhang (Yong Zhang) . As apresentações dos convidados podem ser encontradas no site do evento: https://stt.msu.edu/FCworkshop/.

Em 2017 foi realizada a 7° conferência OTHA-2017, dedicada ao 75 anos do professor Karapetiants (1942- Nikolai K. Karapetiants -2005) [41]. Alguns trabalhos foram apresentados em sessões plenárias, a saber: Characterizations for the fractional maximal operator, Riesz potential and their commutators on Orlicz spaces (Guliyev Vagif), The Fourier transformation on half axis with arbitrary phases (Petrov Vladimir). Mais informações sobre a conferência podem ser encontradas na página: http://otha.sfedu.ru/conf2017/agenda/.

É realizado em Ankara, Turquia, "International Symposium on Mathematical Metods in Engineering (MME-2017), organizado pela universidade de Cankaya [41].

Em julho de 2017, em Lodz, Polônia, aconteceu a conferência : "International Conference on Nonlinear Dynamics and Complexity- NDC 2017". Tendo como finalidade abranger os sistemas dinâmicos não-lineares, a troca de novas ideias para estabelecer relações e futura colaboração científica [41].

Em agosto de 2017 foi realizado em Cleveland, Ohio-EUA, o "Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications- FDTA'17 ". O evento FDTA foi realizado pela primeira vez em 2003, pelo professor Agrawal e outros colegas da FDTA. Ainda em agosto, foi realizada em Sofia, Bulgaria, a 8° "International Conference TMSF 2017- Transform Methods and Special Functions". Os objetivos desta conferência eram: continuar as tradições das conferências TMSF na Bulgária, e comemorar alguns eventos entre os quais: os 70 anos de IMI-BAS (Instituto de Matemática e Informática- Academia de Ciências da Bulgária), 20° volume de "Fractional Calculus and Applied Analysis" e 65° aniversário de Kiryakova [34].

Caponetto (Riccardo Caponetto), Elwakil (Ahmed S. Elwakil), Psychalinos (Costas Psychalinos) e Petras (Ivo Petras), organizaram a sessão especial *Progress on fractional-order devices and systems in interdisciplinary applications*, na 23° conferência "ECCTD 2017- European Conference on Circuit Theory and Design 2017", realizada em Catania, Itália [33].

Em setembro de 2017 é realizada em Lodz, Polônia, a conferência "International Conference on Fractional Signals and Systems- FSS 2017" [33].

No evento "International Federation of Automatic Control- IFAC 2017", foi realizada a sessão especial: *Advances in Fractional Calculus.* A sessão destinou-se a rever os novos desenvolvimentos com base na diferenciação fracionária, tanto em aspectos teóricos quanto em aplicações. Informações mais detalhadas encontram-se em: https://www.ifac2017.org/OIT.

2.2 O que se tem sobre o Cálculo Fracionário no Mundo

A seguir, lista-se o que se tem a respeito do cálculo fracionário no mundo, como conferências, revistas, jornais e livros. Mas, pelo fato de serem em grande número, serão apresentados aqueles considerados mais importantes.

2.2.1 Livros

CAPUTO, M. *Elasticitá Dissipazione*. Bolonha: Zanichelli, 1969.

OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. *The Fractional Calculus: Theory and Application of Differentatiation and Integration to Arbitrary Order*. Nova York: Academic Press, 1974.

ROSS, B. *Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference held at the University of New Haven*. Lecture Notes in Mathematics, 1975.

SRIVASTAVA, H. M.; ROACH, G. F. *Univalent Functions, Fractional Calculus and Their Applications*. Michigan: Ellis Horwood, 1985.

ROSS, B; MILLER, K. S. *An Introdution to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Nova York: John Wiley and Son, 1993.

SAMKO, G. S.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Filadélfia: Gordon and Breach Science Publisher, 1993.

KIRYAKOVA, V. S. *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Harlow: Longman Sci. Tech & John Wiley, 1994.

CARPINTERI, A.; MAINARDI, F. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Nova York: Springer, 1997.

PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations: mathematics in science and engineering*. San Diego: Academic Press, 1999.

HILFER, R. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. River Edge: World Scientific Publishing Company, 2000.

MAGIN, R. L. *Fractional calculus in bioengineering*. Connecticut: Begell House Publishers Inc., 2006.

MAINARDI, F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. Londres: Imperial College Press, 2010.

MONJE, C. A. et. al. Fractional-order Systems and Controls (Fundamentals and Applications). Londres: Springer-Verlag, 2010.

ORTIGUEIRA, M. D. *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*. Lecture Notes in Electrical Engineering. Dordrecht: Springer, 2011.

DAS, S. *Functional fractional calculus*. 2 ed. Nova Iorque: Springer, 2011.

MEERSCHAERT, M. M.; SIKORSKII, A. *Stochastic Models for Fractional Calculus*. Berlim: De Gruyter, 2011.

LESZCZYANSKI, J.S. An Introduction to Fractional Mechanics. Czestochowa: Czestochowa University of Technology, 2011.

BALEANU, D. et. al. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. Cingapura: World Scientific Publishing Company, 2012.

MALINOWSKA, A. B; TORRES, D. F. M. *Introduction to the Fractional Calculus of Variations*. Cingapura: Imperial College Press, London & World Scientific Publishing, 2012.

DAS, S.; PAN, I. *Fractional Order Signal Processing: Introductory Concepts and Applications. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology*. Heidelberg: Springer, 2012.

ABBAS, S.; BENCHOHRA, M.; N'GUÉRÉKATA, G. M. *Topics in Fractional Differential Equations*. v. 27. Nova York: Springer, 2012.

ANNABY, M.H.; MANSOUR, Z.S. *q-Fractional Calculus and Equations*. Lecture Notes in Mathematics, v. 2056. Heidelberg: Springer, 2012.

POTAPOV, A. A.; CHERNYKH, V. A. *Fractional Calculus of A. V. Letnikov in Physics of Fractals*. Lambert Academic Publ., 2012.

COHEN, S. et. al. *Lévy Matters II, Recent Progress in Theory and Applications: Fractional Lévy Fields, and Scale Functions*. Berlim: Springer, 2013.

UCHAIKIN, V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volumes I and II*. Beijing: Higher Education Press, 2013.

ROGOSIN, S. V. et. al. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Nova York: Springer, 2014.

HERMANN, R. *Fractional calculus: an introduction for physicists*. 2 ed. Londres: World Scientific, 2014.

ATANACKOVIĆ, T.M.; PILIPOVIĆ, S.; STANKOVIĆ, B.; ZORICA, D. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. Londres: Wiley-ISTE, 2014.

WEST, B. J. *Fractional Calculus View of Complexity: Tomorrow's Science*. CRC Press, 2015.

ALMEIDA, R.; POOSEH, S.; TORRES D. *Computational Methods in the Fractional Calculus of Variations*. Cingapura: Imperial College Press and World Scientific, 2015.

BALEANU, D. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*. Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos. 2 ed. Cingapura: World Scientific, 2016.

ZHOU, Y; WANG, J.; ZHANG, L. *Basic Theory of Fractional Differential Equations*. 2 ed. Londres: World Scientific, 2016.

PANEVA-KONOVSKA, J. *From Bessel to Multi-Index Mittag-Leffler Functions. Enumerable Families, Series in them and Convergence*. Londres: World Scientific, 2016.

MACHADO, J. T. et al. *Solved Problems in Dynamical Systems and Control* . Reino Unido: The Institute of Engineering and Technology - Digital Library, 2016.

KUMAR, D. *Generalized Fractional Calculus Operators With Special Functions*. Alemanha: LAP Lambert Academic Publishing, 2017.

JOAHIM, H.; MATHAI, A. *An introduction to fractional calculus*. Nova York: Nova Science Publishers, 2017.

GILMUTDINOV, A. K.; USHAKOV, P. A., KHAZALI, R. E. *Fractal Elements and their Applications*. USA: Springer, 2017.

BISWAS, K. et al. *Fractional Order Devices*. Espanha: Springer, 2017.

THABET, H.; KENDRE, S. D. E*lementary Course in Fractional Calculus*. LAP Lambert Academic Publishing, 2018.

MATHAI, A. M.; HAUBOLD, H. J. *Matrix Methods and Fractional Calculus*. World Scientific, 2018.

HAUBOLD, H. J. *Special Functions: Fractional Calculus and the Pathway for Entropy.* Suíça: Axioms, 2018.

2.2.2 Conferências

Conferência Internacional "Fractional Calculus an Its Application", realizada em 1974, na Universidade de New Haven, organizada por Ross [45].

Conferência Internacional "Fractional Calculus" realizada em 1984, em Ross Priory-Universidade de Stratchclyde, Escócia, organizada por McBride e Roach [45].

Conferência Internacional "Fractional Calculus" realizada em 1989, na universidade de Nihon, Tóquio, Japão, organizada por Nishimoto [45].

Conferência internacional "Boundary value problems, special functions and fractional calculus" realizada em Minsk, Bielorussia, 1996. Evento dedicado ao que seria o 90º aniversário de Gakhov (1906- Fedor Dmitrievich Gakhov - 1980). Mais informações no site: http://www.amade.bsu.by/conference-96.html.

Workshop internacional "Transform Methods & Special Functions", o primeiro foi realizado em 1994, Sofia, Bulgária. Foi dada continuidade ao workshop, todos com sessão especial sobre CF e sempre realizados em cidades da Bulgária. Em 1996 realizado em Varna e contou com a mesa redonda "Open Problems in FC"), 1999 (Blagoevgrad), 2003 (Borovets), 2010 (Sofia), 2011 (realizado em Sofia e dedicado ao 80° aniversário do Prof. Peter Rusev), 2014 (realizado em Sofia e dedicado ao 80° aniversário do Prof. Ivan Dimovski) e 2017 (Sofia). Mais informações podem ser encontradas em: http://www.math.bas.bg/ tmsf/.

AMADE- Conferência Internacional "Analytic Methods of Analysis and Differential Equations", iniciada em 1999, em Minsk, Bielorussia. Deu-se continuidade a conferência, nos anos de 2001, 2003, 2006 (dedicada ao centenário de Gakhov), 2009, 2011 (dedicado a memória de Kilbas), 2012 e 2015 (também foi dedicado a memória de Kilbas). Sempre realizadas em Minsk, Bielorussia. Está prevista para setembro de 2018, a conferência AMADE-2018, que será dedicada a memória de Kilbas. Informações podem ser encontradas em: http://www.amade.bsu.by/.

FDA- Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications, realizado primeiramente em 2004, em Bordeaux, França, em seguida nos anos de 2006, em Porto, Portugal, 2008, em Ankara, Turquia, 2010, em Badajoz, Espanha, 2012, em Badajoz, China e 2013, em Grenoble, França [39].

FSS- Symposium on Fractional Signals and Systems, realizado no ano de 2009, em Lisboa, Portugal, 2011, em Coimbra, Portugal, 2013, em Ghent, Bélgica, 2015 em Napoca, Romênia e 2017 em Lodz, Polônia [39]. A conferência objetiva ser um fórum internacional com possibilidade de troca efetiva de conhecimento e experiência entre pesquisadores, em várias áreas teóricas e aplicadas de matemática e engenharia.

FDTA- Symposium on Fractional Derivatives and Their Applications, o primeiro simpósio foi realizado em 2003, Chicago, Illinois. Os outros simpósios foram realizados em: 2005 (Califórnia- EUA), 2007 (Nevada- EUA), 2009 (Califórnia- EUA), 2011 (Washington), 2012 (China), 2013 (Portland- EUA), 2014 (Itália), 2015 (Boston- EUA), 2016 (Nova Zelândia) e 2017 (Ohio- EUA) [39].

ICFDA- Fractional Differentiation and its Applications, realizada nos anos de 2014 e 2016, respectivamente em Catania na Itália e NoviSad na Sérvia. Em junho de 2018 será realizada em Amman, Jordânia.

Para mais detalhes, consultar: http://www.icfda16.com/public/previous-events.php.

2.2.3 Revistas

Journal of Fractional Calculus (JFC). Editor chefe: Nishimoto. Ano de início: 1992 [39].

Fractional Calculus and Applied Analysis (FCAA). Instituto de Matemática e Informática. Acadêmia de Ciências da Bulgária. Ano de início: 1998. Editor chefe: Kiryakova. Sites: www.math.bas.bg/ fcaa; www.diogenes.bg/fcaa; www.degruyter.com/view/j/fca.

Fractional Dynamic Systems. Editores chefes: Josip Pečarić e Yong Zhou. Ano de início: 2010. Site: www.fds.ele-math.com/.

Journal of Fractional Calculus and Applications (JFCA). Editores chefes: A. M. A. El-Sayed e S. Z. Rida. Ano de início: 2010. Site: www.fcag-egypt.com/journals/jfca/.

Fractional Differential Calculus (FDC). Editores chefes: Mokhtar Kirane, Josip Pečarić e Sabir Umarov. Ano de início: 2011. Site: ww.fdc.ele-math.com.

Communications in Fractional Calculus (CFC). Editor: Lan Xu. Ano de início: 2010. Site: www.nonlinearscience.com/journal$_2 218 - 3892.php$.

Progress in Fractional Differentiation and Applications (PFDA). Editor chefe: Dumitru Baleanu. Ano de início: 2015.

Site: www.naturalspublishing.com/show.asp?JorID=48&pgid=0.

Electronic Newsletter "FDA Express" (Fractional Derivative and Applications Express). Editor chefe: Wen Chen. Ano de início: 2011. Site: www.em.hhu.edu.cn/fda/index.htm.

2.3 Cálculo Fracionário no Brasil

Assim como nas demais partes do mundo, verifica-se o interesse em relação ao assunto, no Brasil essa realidade apresenta-se crescente. Em 1993, Ricieri (Aguinaldo Prandini Ricieri) [5], foi o primeiro a mencionar sobre derivada fracionária, em seu livro: *Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos*.

Há estudos relacionados ao CF de um grupo de físicos no Paraná, liderados por Lenzi (Ervin Kaminski Lenzi), físico e professor da Universidade Estadual de Ponta Grossa-Paraná. Alguns de seus trabalhos de pesquisa são: Aspecto das equações de difusão: difusão anômala e aplicações; Equações de Difusão Generalizadas, Difusão Anômala e Soluções. O maior foco do grupo de físicos são as equações lineares e não lineares associadas a difusão anômala [5].

Em Campinas, São Paulo, surge o primeiro estudo sobre a função de Mittag-Leffler, destacando-se sua aplicação: o estudo de equações diferenciais fracionárias onde as soluções, funções transcedentes, podem ser conduzidas a uma destas funções [5].

[5] Ricieri é físico, professor do ITA, fundador do museu de matemática Prandiano, localizado em São Paulo.

Em 2004, aconteceu na Unicamp, o I Encontro Científico de Alunos de Pós-Graduação. Nesse evento, Meza (Vinicius Alegreti Meza) apresenta e publica o resumo do seu trabalho, com o título: *Cálculo fracionário de Riemann Liouville aplicado ao problema da tautócrona* [5].

Em 2007, Camargo (Rubens de Figueiredo Camargo), Chiacchio (Ary Orozimbo Chiacchio) e Oliveira (Edmundo Capelas de Oliveira), apresentaram o trabalho com título: *Addition theorem associated with the generalized Mittag-Leffler functions* adition. Em 2008, o artigo *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation* [7] é publicado, em que discutem o cálculo de uma função de Green fracionária.

Em 2008, Rosendo (Danilo Castro Rosendo), apresenta sua sua dissertação de mestrado: *Sobre a função de Mittag-Leffler* [68], sob orientação do professor Oliveira.

Neste mesmo ano, Machado visita a Unicamp com o objetivo de "disseminar" o CF, apresentando nos seminários, diversas aplicações, muitas delas pertencentes a um livro de sua autoria.

Em 2009, Camargo, em sua tese de doutorado "*Cálculo Fracionário e Aplicações*", sob orientação de Oliveira, faz um estudo completo sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrárias. No mesmo ano, Soubhia (Ana Luisa Soubhia), Camargo, Oliveira e Junior (Jayme Vaz Junior) apresentam o trabalho: *Theorem for series in threee-parameter Mittag-Leffler function, no Simpósio Fractional Signals and Systems- FSS*, realizado em Lisboa, Portugal.

Em 2010, S. Oliveira (Heron Silva Oliveira) em sua dissertação de mestrado, "*Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária*" [60], elabora um completo levantamento histórico do CF e o problema das derivadas fracionárias, até metade do ano de 2010. Nesse mesmo ano, atendendo ao convite do professor Oliveira, Mainardi visita a Unicamp, e após ter ministrado um minicurso iniciou-se uma colaboração com objetivo de estudar, sob o ponto de vista matemático e físico, respectivamente, a completa monotocidade de uma função e problemas de viscoelasticidade, ambos associados ao CF.

Em 2011, Costa (Felix Silva Costa), Junior, Oliveira e Camargo tem o artigo: *Integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox* [12], publicado na revista TEMA- Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, este trabalho foi apresentado no XXX CNMAC 2010, Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, realizado em Águas de Lindóia- SP.

Costa apresenta sua tese de doutorado: *Função H. de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário* [13], em que faz um estudo da função hipergeométrica e suas possíveis generalizações, integral de Mellin-Barnes e a função G de Meijer, apresentando as aplicações envolvendo a função H de Fox e o cálculo fracionário.

O Seminário: *Cálculo Fracionário e Aplicações em Física*, é realizado em 2011, na Universidade Federal do Rio Grande- UFRG, ministrado por Lazo (Matheus Jatkoske Lazo), professor do IMEF- Instituto de Matemática, Estatística e Física, FURG. No seminário foram abordados aspectos gerais do Cálculo Fracionário, assim como suas aplicações em Física.

Em 2013, é realizado o CMAC (Congresso em Matemática Aplicada), em Bauru, São Paulo, neste evento foi organizado o Primeiro Simpósio Brasileiro de Cálculo Fracionário, financiado pela FAPESP, cujo objetivo era divulgar o CF no Brasil. Este simpósio foi dedicado ao professor Oliveira, docente do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica- Imecc da Unicamp, um dos mais importantes divulgadores do tema no Brasil.

Contou-se com a presença de pesquisadores brasileiros e dos professores Machado e Mainardi (com objetivo de dar continuidade a colaboração iniciada em 2010). Além disso, devido à grande quantidade de trabalhos submetidos para publicação em 2013, relacionados ao CF, a SBMAC [6] criou uma nova sub-área de matemática aplicada: "ST18 - Calculo Fracionário e Aplicações", com trabalhos em sessões e painéis técnicos orais, todos com um público bastante expressivo [28]. Pode-se afirmar que o evento foi um marco para o desenvolvimento do CF no Brasil. O programa pode ser visto em http://www.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/node/27. Seguem abaixo, importantes palestras realizadas no simpósio.

Fractional calculus: Fundamentals, computational implementation and applications, palestrante Machado.

Introdução à Mecânica Quântica Fracionária, palestrante Vaz.

Estudo sobre as Soluções da Equação de Bessel via Cálculo de Ordem não Inteira, palestrante Rodrigues (Fabio Grangeiro Rodrigues).

Fractional Diffusion Equation, Solutions and Applications, palestrante Lenzi.

Teorema Fundamental do Cálculo Fracionário, palestrante Grigoletto (Eliana Contharteze Grigoletto).

O Cálculo Variacional Fracionário e suas aplicações, palestrante Lazo (Matheus Jatkoske Lazo).

Modiffied Riemann-Liouville Approach to Field Theory and Particle Physics, palestrante Weberszpil (José Weberszpil).

Some properties of the Mittag-Leffler and Wright functions of relevance in Fractional Calculus, palestrante Mainardi.

Breve Introdução ao Cálculo Fracionário (Derivada Fracionária e as Funções Especiais), palestrante Oliveira. Todas as palestras podem ser encontradas no site da SBMAC.

Em 2014, em Natal-RN, aconteceu o XXXV CNMAC, no evento foram apresentados vários trabalhos referentes ao CF (já publicados em 2015, ver [74]), como por exemplo, as sessões técnicas orais:

Linking Fractional Derivative and Derivative in Time Scales, com autores Damasceno (Berenice Camargo Damasceno) e Barbanti (Luciano Barbanti).

Comportamento Inesperado da Derivada Fracionária de Caputo, autores Varalta (Najla Varalta), Gomes (Arianne Vellasco Gomes) e Camargo.

Na exposição relacionada a Matemática Aplicada a Física, foram apresentados alguns trabalhos em sessões técnicas- painéis de iniciação científica. Sendo que já foram publicados em 2015, em anais de congresso, ver referência [74]:

Oscilador Harmônico Fracionário via Transformada de Laplace, autores: D. Oliveira (Daniela dos Santos de Oliveira) e Oliveira;

Funções de Mittag-Leffler e a Transformada de Laplace, autores: Teodoro (Graziane Sales Teodoro) e Oliveira;

Equações Diferenciais Ordinárias Fracionárias, autores: Plata (Adrian Ricardo Gomez Plata) e Oliveira;

Cálculo Fracional: Modelagem em Física dos Solos, autores: Nascimento (Kamila Costa do Nascimento) e Weberszpil.

[6] A Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional-SBMAC foi criada em novembro de 1978. Atualmente é muito popular entre os pesquisadores brasileiros de diferentes áreas da matemática aplicada, pelo fato de possuir três revistas: *Notas em Matemática Aplicada*, *Tema- Tendências em Matemática Aplicada* e *CAM - Matemática Computacional e Aplicada*. A SBMAC organiza todos os anos o Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional- CNMAC.

Todos estes trabalhos estão disponíveis no site da SBMAC: https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac.

Em 2015, um importante fato acontece no Brasil, Oliveira e Camargo lançam o primeiro livro sobre o CF em português, cujo título é *Cálculo Fracionário* [5] . Camargo, ex-aluno de Oliveira, hoje atua como docente na Unesp-Bauru. O livro começa com aspectos históricos do CF desde seu início em 1695, até por volta do ano 2015, e contém alguns exercícios, proposições e aplicações. Tem como público-alvo: alunos de graduação, pós-graduação e professores das áreas de exatas.

“Estamos plantando uma árvore para os jovens que estão chegando”, afirma o professor Oliveira. A sua justificativa é que o CF não existe como disciplina de graduação no Brasil. O professor sofreu influência de Mainardi (na Itália) e juntos formaram um grupo de investigação colaborativa que conta também com Machado (em Portugal).

Nesse mesmo ano, Vieira (Denner Serafim Vieira) sob a orientação de Lenzi, em sua dissertação de mestrado, cujo título é *Equações de Difusão e o Cálculo Fracionário* [80], apresenta um estudo sobre fenômenos de difusão e investiga sistemas que apresentam comportamentos difusivos anômalos.

Em novembro de 2015 foi realizado na UFES, o minicurso *Cálculo Fracionário e Equações Diferenciais Fracionárias - Uma Visão Introdutória*, ministrado por Neto (Paulo Mendes de Carvalho Neto), professor da UFSC. O objetivo era discutir a derivada fracionária em espaços de Banach e provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais fracionárias. No minicurso foram discutidas algumas funções especiais: função de Mittag-Leffler, função de tipo Wrigth e função de Mainardi.

Conforme foi vericado no levantamento descrito, o CF tem estado presente em vários eventos brasileiros até então, em 2016, no XXXVI CNMAC, realizado em Gramado-RS, aconteceu a conferência com o título *Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Fracionais de Convecção- Difusão em 2D e 3D*, cujo conferencista foi Yun (Yuan Jin Yun), professor da UFPR.

Seguem alguns trabalhos que foram apresentados em sessões técnicas orais, estes já foram publicados em 2017, ver referência [11]:

Problema Não Linear de Difusão Fracionária com Absorção, autores: Costa et al (UEMA).

Derivada fracionária no sentido de Caputo-Hadamard, autores D. Oliveira (Unicamp) e Oliveira (Unicamp).

Trabalhos apresentados em sessões técnicas- painéis, também já publicados [11]:

Funções de Wannier da equação de Schrödinger fracionária unidimensional: o pente de Dirac, autores: Gomes (Unesp), Camargo (Unesp) e Alexys Bruno Alfonso (Unesp);

Derivadas de ordem fracionária e uma interpretação em viscoelasticidade, autores Carla Marilla Caldeirani Lino (Unesp), Damasceno (Unesp) e Barbanti (Unesp).

No ERMAC 2016, Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, realizado em Bauru-SP, Oliveira realizou uma palestra com título: *Cálculo Fracionário: Estado da Arte.*

Em maio de 2016 é realizado em São José dos Campos, São Paulo, a 6° International Conference on Nonlinear Science and Complexity- NSC 2016, dentro desta conferência, Machado, Baleanu e Edelman (editores da revista FCAA) organizaram o simpósio *Cálculo Fracionário e Aplicações.* Ainda neste ano foi realizada a palestra: *Uma pequena introdução ao cálculo* *fracionário e algumas questões interessantes*, no seminário do PGMAC, Universidade Estadual de Londrina e ministrada pelo professor Neto.

Em setembro de 2016, o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação-ICMC, da USP, ofereceu o curso gratuito *Introdução ao cálculo fracionário e sua relação com processos estocásticos*, voltado a alunos de mestrado e doutorado e pesquisadores interessados na área. Com objetivo era proporcionar uma apresentação inicial sobre os tópicos de CF e mostrar algumas aplicações atuais. O curso foi ministrado pelo professor Polito [7] (Federico Polito), da Universidade de Torin, Itália.

No ERMAC 2017, realizado em maio na UNESP, Bauru-SP, foram realizadas várias sessões técnicas de comunicação oral. Trabalhos apresentados na sessão técnica: *Cálculo Fracionário.*

Derivadas fracionárias: critérios para classificação. Autores: Teodoro e Oliveira.

Uma equação diferencial parcial tempo-fracionária e o teste ESR. Autores: Sousa (José Vanterler da Costa Sousa), Oliveira e Magna (Luís Alberto Magna).

Hepatite B-investigação numérica de ordem não-inteira. Autores: Cardoso (Lislaine Cristina Cardoso), Santos (Fernando Luiz Pio dos Santos) e Camargo.

Sessão técnica com o título: **Cálculo Fracionário e Aplicações**.

Sobre uma derivada fracionária com uma modificação do tipo Caputo. Autores: Daniela Oliveira e Oliveira.

Um estudo sobre a memória epidemiológica modelo SIRC fracionário. Autores: Ana Carla Ferreira N. Gomes e Adriano de Cezaro.

Método da transformada diferencial generealizada no modelo fracionário de Malthus. Autores: Kenjy (Lucas Kenjy), Alfonso e Camargo.

Um estudo de estabilidade para um modelo fracionário de crescimento do câncer vascular. Autores: Tavoni (Robinson Tavoni), Mancera (Paulo Mancera) e Camargo.

Funções completamente monótonas no cálculo fracionário. Autores: Rosa (Ester Rosa) e Oliveira.

Em setembro de 2017 foi realizado em São José dos Campos-SP, o XXXVII CNMAC. Segue trabalhos apresentados em sessões técnicas-orais:

Fractional Differential Operators: Eigenfunctions, autores Grigoletto, Camargo e Oliveira.

Aplicabilidade do Método da Transformada Diferencial na Modelagem Fracionária, autores Kuroda, Alfonso, Mancera e Camargo.

Análise de estabilidade dos modelos fracionários de Gompertz e von Bertalanffy com derivada de Caputo, autores Tavoni, Camargo e Mancera.

Trabalhos apresentados em Sessões Técnicas – Painéis:

Oscilador Harmônico Fracionário, autores Vizotto (Giovana Pereira Vizotto) e Camargo

Modelo SIRC Fracionário, autores Ana Carla Ferreira Nicola Gomes e Cezaro

Modelo matemático de dormência tumoral: via cálculo fracionário, autores Ribeiro (Aiara Ribeiro) e Mancera.

[7] Polito é pesquisador em diversas áreas, inclusive sobre CF, é autor de vários artigos voltados ao tema, pode-se encontrar seus trabalhos na página: http://www.federicopolito.it/publications.

Aplicação do Cálculo Fracionário no Modelo de Corrida Armamentista de Richardson, autor Ferreira (Anderson Augusto Ferreira).

Sousa e Oliveira, motivados pelas derivadas fracionárias de ψ-Riemann-Liouville e ψHilfer, introduzem dois novos operadores fracionários: a ψ-integral fracionária e ψ-derivada fracionária. No Artigo *On two new operators in fractional calculus and application* [76] são discutidas e apresentadas as relações entre os dois operadores fracionários e alguns exemplos que envolvem a função Mittag-Leffler.

Em outubro de 2017, o Instituto de Física da UFMS realiza a 1ª Semana da Física, o professor Oliveira foi convidado para ministrar a palestra: *Cálculo Fracionário e Aplicações*. Em dezembro, na X SEMAT da UFS, foi realizada a palestra: *Introdução ao Cálculo Fracionário*, ministrada por Viana (Arlucio da Cruz Viana), professor da UFS-DMAI.

Encontrou-se uma ata de reunião na data 27 de março de 2017, da Universidade Federal de São João Del Rei, em Minas Gerais, no site https:$//www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/defim/2017_marco_ordinaria.pdf$. Uma das pautas da reunião era a oferta da disciplina Cálculo Fracionário, pelo professor José Eloy (doutor em física), com 2 horas-aula semanais. Conforme ata, a solicitação foi aceita por unanimidade. A partir daí, pode-se observar que está sendo dada importância e reconhecimento ao CF no Brasil.

2.4 Materiais sobre o Cálculo Fracionário no Brasil

2.4.1 Livros

RICIERI, A. P. *Derivada Fracionária, Transformada de Laplace e Outros Bichos*. São Paulo: Prandiano, 1993.

OLIVEIRA, E. C. D.; CAMARGO, R. F. *Cálculo Fracionário*. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

EVANGELISTA, L. R.; LENZI, E. K. *Fractional Diffusion Equations and Anomalous Diffusion*. Cambridge University Press, 2018.

2.4.2 Artigos

VARGAS, R. M. F. Uso do cálculo fracionário para simulação de temperatura transiente junto à parede de reservatórios esféricos. *Proceedings of the ENCIT 2002*, 2002.

GONÇALVES, G. et al. Soluções exatas para a equação de difusão fracionária: formalismo de função de Green. *Acta Scientiarum. Technology*, v. 26, n. 2, p. 109-116, 2004.

LENZI, M. K. et al. Difusão anômala e equações fracionárias de difusão. Acta Scientiarum. Technology, v. 27, n. 2, 2005.

GONÇALVES, G. et al. Equação da difusão fracionária não-linear: solução exata. *Acta Scientiarum. Technology*, v. 28, n.1, 2006.

CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; OLIVEIRA, E. C. D. Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation. *Jornal of Mathematical Physics*, v. 49, n. 3, DOI: 10.1063/1.2890375, 2008.

CAMARGO, R. F.; CHARNET, R.; OLIVEIRA, E. C. D.On some fractional Green´s functions. *Jornal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 4, DOI: 10.1063/1.3119484, 2009.

CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; JUNIOR, J. V. On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator, *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 12, p. 13, DOI: 10.1063/1.3269587, 2009.

CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; CHARNET, R.; Oliveira, E. C. D. Solution of the fractional Langevin equation and the Mittag-Leffler functions, *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 6, DOI: 10.1063/1.3152608, 2009.

OLIVEIRA, E. C. D; COSTA, F. S.; JUNIOR, J. V. The fractional Schrödinger equation for delta potentials. *Journal of Mathematical Physics*, v. 51, n. 12, 2010.

ISFER, L. A. D. et al. Fractional control of an industrial furnace. Acta Scientiarum. *Technology*, v. 32, n. 3, 2010.

OLIVEIRA, E. C. D; JUNIOR, J. V. Tunneling in fractional quantum mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 44, n. 18, 2011.

OLIVEIRA, E. C. D; COSTA, F. S. Fractional thermal systems. *IEEE*, DOI: 10.1109/ ICMT.2011.6002434, 2011.

OLIVEIRA, E. C. D; COSTA, F. S. Fractional wave-diffusion equation with periodic conditions. *Journal of Mathematical Physics*, v. 53, n. 2, DOI: 10.1063/1.4769270, 2012.

PFAFFENZELLER, R. A.; LENZI, M. K.; LENZI, E. K. Modeling of granular material mixing using fractional calculus. *International Review of Chemical Engineering*, v. 3, n. 6, p. 818-821, 2011.

DOS SANTOS, M. C. et al. Development of heavy metal sorption isotherm using fractional calculus. *International Review of Chemical Engineering*, v. 3, n. 6, p. 814-817, 2011.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. D.; JUNIOR, J. V. On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, v. 15, n. 1, p. 1–16, DOI: 10.1007/s11040-011-9100-8, 2012.

CIUCHI, F. et al. Fractional diffusion equation and the electrical impedance: Experimental evidence in liquid-crystalline cells. *The Journal of Physical Chemistry C*, v. 116, n. 15, p. 8773-8777, 2012.

GRIGOLETTO, E. C.; OLIVEIRA, E. C. D; COSTA, F. S. . Aplicações do teorema fundamental do cálculo fracionário em equações diferenciais fracionárias. Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 2013.

GRIGOLETTO, E. C.; OLIVEIRA, E. C. D. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus. *Applied Mathematics*, v. 4, n. 07, p. 23-33, 2013.

GRIGOLETTO, E. C. et al. Slowing-down of Neutrons: A Fractional Model. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, v. 6 , n. 2, DOI: 10.1685, 2014.

OLIVEIRA, D. S.; DEIF, S.; OLIVEIRA, E. C. D. On a sum with a three-parameter Mittag-Leffler functional. *Integral Transforms and Special Functions*, v. 27, n. 8, p. 1-14, DOI: 10.1080, 2014.

MAINARDI, F.; OLIVEIRA, E. C. D.; JUNIOR, J. V. Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function. *Meccanica*, v. 49, n. 9, p. 2049–2060, DOI: 10.1007, 2014.

OLIVEIRA, E. C. D.; MACHADO, J. A. T. A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, 2014.

VARALTA, N.; GOMES, A. V.; CAMARGO, R. F. A prelude to the fractional calculus applied to tumor dynamic. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 15, n. 2, p. 211-221, 2014.

FERNANDES, B. D. Diffusion equations and different spatial fractional derivatives. *Acta Scientiarum. Technology*, v. 36, n. 4, p. 657-662, 2014.

COSTA, F. S.; Grigoletto, E. C.; JUNIOR, J. V.; Oliveira, E. C. D. Slowing-down of neutrons: a fractional model. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, v. 6, n. 2, 2015.

COSTA, F. S. et al. Similarity solution to fractional nonlinear space-time diffusion-wave equation. *Journal of Mathematical Physics*, v. 56, n. 3, 2015.

COSTA, F. S.; PEREIRA, M. R. A. Travelling Waves in Space-Fractional Nonlinear Diffusion with Linear Convection. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, v. 5, n. 2, p. 462-468, 2015.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. D. Solução da Equação de Bessel via Cálculo Fracionário. *Revista Brasileira de Ensino Física*, v. 37, n. 3, 2015.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. D. Introdução às Técnicas do Cálculo Fracionário para Estudar Modelos da Física Matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n. 3, p. 3308-1-3308-15, 2015.

ROSA, E. C. F. A.; OLIVEIRA, E. C. D. Relaxation Equations: Fractional Models. *Journal of Physical Mathematics*, v. 6, n. 2, 2015.

GRIGOLETTO, E. C.; CAMARGO, R. D. F.; OLIVEIRA, E. C. D. Linear fractional differential equations and eigenfunctions of fractional differential operators. *Computational and Applied Mathematics*, p. 1-15, DOI: 10.1007/s40314-016-0381-1, 2016.

COSTA, F. S. et al. On the fractional Harry Dym equation. *Computational and Applied Mathematics*, p. 1-15, DOI: 10.1007, 2017.

KURODA, L. K. B. et al. R. F. Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. *Computational and Applied Mathematics*, v. 36, n. 3, p. 1173–1183, 2017.

OLIVEIRA, D. S.; TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, E. C. D. Sobre Derivadas Fracionárias. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 40, n. 2, DOI: 10.1590, 2017.

SOUSA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. C. D. A new fractional derivative of variable order with non-singular kernel and fractional differential equations. *Math. CA*, arXiv:1712.06506, 2017.

SOUSA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. C. D. On two new operators in fractional calculus and application. *Math. CA*, arXiv:1710.03712, 2017.

SOUSA, J. V. C.; MAGNA, L. A. OLIVEIRA, E. C. D. Fractional calculus and the ESR test. *AIMS Mathematics*, v. 2, n.4, p. 692-705, DOI: 10.3934/Math.2017.4.692, 2017.

2.4.3 Dissertações

VARGAS, R. M. F. *Estudo de temperatura nao estacionária num tubo pelo metodo do calculo fracionário*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto ALegre, 1990.

ANDRADE, M. F. D. Equações de difusão fracionárias e não-lineares: soluções e difusão anômala. Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2006.

OLIVEIRA, H. S. *Introdução ao cálculo de ordem arbitrária*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2010.

GOMES, E. M. *Desenvolvimento de Isoterma de Sorção de Metal Pesado Baseada no Cálculo Fracionário*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

KRUMREICH, C. E. *Formulação Lagrangiana para Sistemas Dissipativos Através do Cálculo Fracionário*, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2013.

FRIESEN, V. C. *Modelagem da sorção de metais pesados utilizando cálculo fracionário*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

MORAES, R. M. D. *Transporte de contaminantes inorgânicos em solos tropicais lateríticos: abordagem com cálculo fracionário*, Universidade de Brasília, Distrito Federal, 2013.

OLIVEIRA, J. D. S. D. *Semigrupos Analíticos e Derivada Fracionária*, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2014.

TEODORO, G. S. *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2014.

SCHNEIATER, R. *Estudo Comparativo de um Controlador PID de Ordem Fracionária com um Controlador PID Convencional*, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2014.

GOMES, A. V. *Transformadas Integrais, Modelagem Fracionária e o Sistema de Lotka-Volterra*, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, D. S. *Derivada Fracionária e as funções de Mittag-Leffler.* Unicamp, Campinas, São Paulo, 2014.

LEITOLES, D. P. *Análise de sistemas reacionais e de separação usando cálculo fracionário*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

CARDOSO, L. C. *Um modelo matemático para a doenca da Babesiose Bovina e populacão de carrapatos usando derivadas fracionárias*, Universidade Federal de Alfenas, Minas Gerais, 2015.

VIEIRA, D. S. *Equações de Difusão e o Cálculo Fracionário.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2015.

KURODA, K. B. *Cálculo fracionário aplicado em dinâmica tumoral: método da transformada diferencial generalizada*, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, São Paulo, 2016.

JAROSZ, S. *A Equação de Schrödinger Fracionária com Potenciais Delta*, Unicamp, Campinas, 2016.

ZANCHETTI, A. *Modelo de Dispersão de Contaminantes na Camada Limite Planetária Empregando o Cálculo Fracionário*, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande do Sul, 2017.

BONI, M. D. T. *Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações*, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2017.

VIEIRA, G. B. T*eoria qualitativa e estabilidade de lyapunov para sistemas de equações de ordem fracionária e uma aplicação em um modelo SIR-SI para a dengue*, Universidade Federal de Alfenas, Minas Gerais, 2017.

2.4.4 Teses

MOSCHEN, I. D. C. *Sobre as Funções Mittag-Leffler e o Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos*, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianopólis, 2006.

CAMARGO, R. D. F. *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2009.

COSTA, F. S. *Função H de Fox e suas aplicações no cálculo fracionário*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2011.

GRIGOLETTO, E. C. *Equações Diferenciais Fracionárias e as Funções de Mittag-Leffler*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2014.

SANTOS, M. A. F. D. *Estimativa do Fluxo de Calor e da Difusividade Térmica do Solo, baseado na Solução da Derivada Temporal Fracionária de Meia Ordem em Ferramenta de Software*, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

JACYNTHO, A. *Identificação de Funções de Transferência de Ordem Fracionária Utilizando como Entrada um Degrau*, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, São Paulo, 2015.

RODRIGUES, F. G. *Sobre Cálculo Fracionário e Soluções da Equação de Bessel*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2015.

SALGADO, G. H. O. *Métodos Numéricos para Solução de Equações Diferenciais Segundo a Derivada de Caputo*, Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.

SOARES, J. C. A. *Cálculo Fracionário e as Equações de Evolução*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2016.

PLATA, A. R. G. *Equações diferenciais fracionárias não lineares*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2016.

HICKMANN, T. *Análise da Variação Térmica Sazonal em Barragem de Contrafortes Com o Uso de Cálculo Fracionário*, 2016.

ROSA, E. C. F. A. *Funções de Relaxação Cinéticas Fracionárias*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2017.

SOUSA, J. V. C. *Equação difusão tempo-fracionário (Sedimentação de Eritrócitos)*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2018.

OLIVEIRA, D. S. *Derivadas fracionárias: generalizações*, Unicamp, Campinas, São Paulo, 2018.

2.5 Sobre as Novas Derivadas Fracionárias

Atualmente, de acordo com [58], pode-se destacar além das derivadas clássicas, dois grupos de derivadas, consideradas por muitos pesquisadores como fracionárias, que vem aparecendo em diversas aplicações. No primeiro grupo tem-se as derivadas definidas por limites e recuperam as derivadas de ordem inteira e ainda satisfazem muitas das propriedades do cálculo de ordem inteira. O outro grupo está associado com aquelas que tem o núcleo não-singular, onde o primeiro operador dessa forma foi proposto por Caputo-Fabrizio. Pertencem ao primeiro grupo as derivadas fracionárias de Khalil et al. [25] e Katugampola [26].

No segundo grupo tem-se as derivadas fracionárias de Caputo-Fabrizio [8, 10], Yang-Srivastava- Machado [82] e Yang-Machado [83]. Há também outras formulações, por exemplo, Hao et al. [22] discutem modelos de relaxação e difusão com núcleos não singulares e Gómez-Aguillar [19] apresenta o oscilador do tipo Irving-Mullineux, o qual é utilizada uma derivada fracionária cujo núcleo é uma função de Mittag-Leffer.

Apesar de importantes para o CF, limita-se em apenas referenciá-las, pois seu estudo demanda um maior aprofundamento teórico, como pode ser visto com detalhes em [58].

2.5.1 Critérios para Classificação de Derivadas Fracionárias

Em 1975, Ross [70] propõe critérios que devem ser satisfeitos por um operador, a fim de considerá-lo como uma derivada fracionária. Em 2015, Ortigueira e Machado [61] reformularam estes critérios e provam que as derivadas fracionárias de Caputo e o Potencial de Riesz satisfazem os critérios, a saber:

1. Linearidade, o operador é linear.
2. Identidade, a derivada de ordem zero de uma função é a própria função.
3. Quando a ordem da derivada é um número inteiro, a derivada fracionária tem o mesmo resultado que a derivada ordinária.
4. A lei dos expoentes $D^{\alpha}D^{\beta}f(x) = D^{\alpha+\beta}f(x)$ é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.
5. Vale a generalização da regra de Leibniz:

$$D^{\alpha}[f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!} D^{k}f(x)D^{\alpha-k}g(x). \tag{2.5}$$

Teodoro et al. [58] mostraram que as derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov e Hilfer satisfazem os critérios descritos. Os autores também demonstram que a derivada fracionária de Caputo- Fabrizio, apesar de ser considerada derivada fracionária, não satisfaz os critérios propostos por Ortigueira e Machado.

Teodoro e Oliveira [78] mostram que a derivada fracionária de Riemann-Liouville satisfaz os critérios.

Capítulo 3

3 Definições, Propriedades e Aplicações do Cálculo Fracionário

Este capítulo tem como objetivo apresentar definições e propriedades básicas tanto da derivada fracionária quanto da integral fracionária, assim como mostrar aplicações importantes do Cálculo Fracionário.

3.1 Integral Fracionária

3.1.1 Integral Fracionária de Riemann-Liouville

Definição 3.1: *Integral Fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem* $\alpha \in \mathbb{C}$ [1].

$$I^{\alpha}_{a^+}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad t \in [a,b], \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{3.1}$$

Para $\alpha = 0$, define-se $I^0_{a^+}f = f$, isso se deve ao fato de supor que $f \in C^1([a,b])$ e através da integração por partes da equação (3.1) tem-se que:

$$I^{\alpha}_{a^+}f(t) = \frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha}f^{(1)}(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

De modo que:

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} I^{\alpha}_{a^+}f(t) = f(a) + \int_a^t f^{(1)}(\tau)d\tau = f(t). \tag{3.3}$$

Definição 3.2: *Integral Fracionária de Riemann-Liouville à direita de ordem* $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$I^{\alpha}_{b^-}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (-t+\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad t \in [a,b], \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{3.4}$$

A equação (3.1) é válida para $t > a$ e a equação (3.2) é válida para $t < b$. As constantes a e b determinam o limite inferior e superior do domínio da integral e, assim, podem ser arbitrariamente escolhidos. Obviamente o valor real da integral depende da escolha das duas constantes (a,b).

Propriedade 3.1: *Caso polinomial.*

Nos casos especiais $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ e $g(t) = (b-t)^{\beta-1}$, $t \in [a,b]$, α e $\beta \in \mathbb{C}$ temos:

$$I^{\alpha}_{a^+}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha-1}, \qquad Re(\alpha) > 0, \qquad Re(\beta) > 0, \tag{3.5}$$

$$I^{\alpha}_{b^-}(b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-t)^{\beta+\alpha-1}, \qquad Re(\alpha) > 0, \qquad Re(\beta) > 0. \tag{3.6}$$

3.1.2 Integral Fracionária de Liouville

Definição 3.3: *Integral Fracionária de Liouville à esquerda* [21]:

$$
{}_{L}I_{+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad a=-\infty. \tag{3.7}
$$

Definição 3.4: *Integral Fracionária de Liouville à direita:*

$$
{}_{L}I_{-}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{+\infty}(-t+\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad b=+\infty. \tag{3.8}
$$

3.1.3 Integral Fracionária de Riemann

Definição 3.5: *Integral Fracionária de Riemann à esquerda:*

$$
{}_{R}I_{+}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad a=0. \tag{3.9}
$$

Definição 3.6: *Integral Fracionária de Riemann à direita:*

$$
{}_{R}I_{-}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{0}(-t+\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, \qquad b=0. \tag{3.10}
$$

Para que seja entendida a diferença entre as duas definições, de Riemann e Liouville, será usada a função $f(t)=e^{kt}$ [21].

Usando as integrais de Liouville, à esquerda e à direita, respectivamente, tem-se:

$$
{}_{L}I_{+}^{\alpha}e^{kt} = k^{-\alpha}e^{kt}, \qquad k,t>0, \tag{3.11}
$$

$$
{}_{L}I_{-}^{\alpha}e^{kt} = (-k)^{-\alpha}e^{kt}, \qquad k<0. \tag{3.12}
$$

Usando as integrais de Riemann, à esquerda e à direita, respectivamente, a saber:

$$
{}_{R}I_{+}^{\alpha}e^{kt} = k^{-\alpha}e^{kt}\left[1-\frac{\Gamma(\alpha,kt)}{\Gamma(\alpha)}\right], \qquad t>0, \tag{3.13}
$$

$$
{}_{R}I_{-}^{\alpha}e^{kt} = (-k)^{-\alpha}e^{kt}\left[1-\frac{\Gamma(\alpha,kt)}{\Gamma(\alpha)}\right], \qquad t<0, \tag{3.14}
$$

onde $\Gamma(\alpha,t)$ é uma função gama incompleta [8].

[8] A função gama incompleta $\gamma(\alpha,t)$ é uma função inteira na variável t, definida pela seguinte integral [57]:

$$
\gamma(\alpha,t) = \int_{0}^{t} e^{-z}z^{\alpha-1}dz, \qquad Re(\alpha)>0
$$

.

3.1.4 Integral Fracionária de Weyl

As operações de integração e derivação fracionárias definidas por Riemann-Liouville são adequadas para séries de potências, mas não para funções definidas por séries de Fourier. Por esse motivo deve-se utilizar os operadores de integração e derivação fracionárias de Weyl.

Definição 3.7: *Integral fracionária de Weyl à direita, sendo* $-\infty \leq x < \infty$:

$$ {}_xW_\infty^\alpha f(x) = {}_xI_\infty^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{3.15}$$

Definição 3.8: *Integral fracionária de Weyl à esquerda:*

$$ {}_{-\infty}W_x^\alpha f(x) = {}_{-\infty}I_x^\alpha := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (-t+x)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{3.16}$$

Tem-se que ${}_aI_x^\alpha f(x)$ e ${}_xI_b^\alpha f(x)$ são relacionadas através da integração fracionária por partes. Para $a = 0$ e $b = \infty$ a relação é dada por [14]:

$$\int_0^\infty f(x)({}_0I_x^\alpha g)(x)dx = \int_0^\infty ({}_xW_\infty^\alpha f)(x)g(x)dx. \tag{3.17}$$

3.2 Derivada Fracionária

3.2.1 Derivada Fracionária de Riemann-Liouville

Definição 3.9: *Derivadas de Riemann-Liouville em intervalos finitos*

As derivadas de Riemann-Liouville, à esquerda e à direita, de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) \geq 0$ são definidas por [5]:

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{3.18}$$

onde $n = [Re(\alpha)] + 1$, $x > a$, $n \notin \mathbb{N}$.

$$(D_{b-}^\alpha y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(-x+t)^{\alpha-n+1}}, \tag{3.19}$$

onde $n = [Re(\alpha)] + 1$, $x < b$, $n \notin \mathbb{N}$.

No caso $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$(D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \qquad e \qquad (D_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x), \tag{3.20}$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual derivada de $y(x)$ de ordem n.

3.2.2 Derivada Fracionária de Liouville

Obtém-se a definição de Riemann para $0 < \alpha < 1$ usando as integrais (3.7) e (3.8) e o operador $D^\alpha = D^m D^{\alpha-m}$, $m \in \mathbb{N}$. As derivadas fracionárias à esquerda e à direita de Liouville apresentam-se, respectivamente [21]:

$$ {}_L D_+^\alpha y(x) = \frac{d}{dx} {}_L I_+^{1-\alpha} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \tag{3.21} $$

$$ {}_L D_-^\alpha y(x) = \frac{d}{dx} {}_L I_-^{1-\alpha} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (-x+t)^{-\alpha} f(t) dt. \tag{3.22} $$

3.2.3 Derivada Fracionária de Riemann

Obtém-se a definição de Riemann usando as integrais (3.9) e (3.10) e o operador $D^\alpha = D^m D^{\alpha-m}$, $m \in \mathbb{N}$. As derivadas fracionárias à esquerda e à direita de Riemann apresentam-se, respectivamente:

$$ {}_R D_+^\alpha y(x) = \frac{d}{dx} {}_R I_+^{1-\alpha} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{3.23} $$

$$ {}_R D_-^\alpha y(x) = \frac{d}{dx} {}_R I_-^{1-\alpha} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{x}^{0} (-x+t)^{-\alpha} f(t) dt. \tag{3.24} $$

3.2.4 Derivada Fracionária de Riesz

Derivada fracionária de Riesz através da derivada de Weyl é definida a partir da expressão abaixo, onde $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 1$ [5]:

$$ R_x^\alpha y(x) = -\frac{D_+^\alpha y(x) + D_-^\alpha y(x)}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, \tag{3.25} $$

onde $D_\pm^\alpha y(x)$ são as derivadas fracionárias de Weyl:

$$ D_\pm^\alpha y(x) = \begin{cases} \pm \dfrac{d}{dx} I_\pm^{1-\alpha} y(x), & 0 < \alpha < 1 \\ \\ \dfrac{d^2}{dx^2} I_\pm^{2-\alpha} y(x), & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{3.26} $$

Na expressão (3.26) $I_\pm^\mu$ denotam integrais fracionárias de Weyl de ordem $\mu > 0$.

Derivada fracionária de Riesz através da transformada de Fourier é definida pela expressão:

$$ \Im\left[R_x^\alpha f(x)\right] = -\left|\omega\right|^\alpha F(\omega), \qquad 0 < \alpha < 2, \tag{3.27} $$

$$R_x^\alpha f(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\alpha F(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{3.28}$$

onde $F(\omega)$ é a transformada de Fourier e ω é o parâmetro da transformada.

3.2.5 Derivada Fracionária de Caputo

Definição: Derivada fracionária de Caputo à esquerda:

A derivada fracionária de Caputo à esquerda de uma função de ordem α com $\alpha > 0$ e $t \in [a, b]$, é denotada por ${}_a^C D_t^\alpha f$ [1]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^t \frac{f^{(n)}\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & n-1 \leq \alpha < n, \\ \\ \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), & \alpha = n. \end{cases} \tag{3.29}$$

Definição 3.1 Derivada fracionária de Caputo à direita:

A derivada fracionária de Caputo à direita de uma função de ordem α é denotada por ${}_t^C D_b^\alpha f$:

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_t^b \frac{f^{(n)}\tau}{(\tau-t)^{\alpha+1-n}}d\tau, & n-1 \leq \alpha < n \\ \\ (-1)^n \dfrac{d^n}{dt^n}f(t), \quad \alpha = n, & t \in [a, b]. \end{cases} \tag{3.30}$$

É importante notar que a derivada de Caputo de uma função constante é zero.

Em geral, as derivadas fracionárias de Caputo e de Riemann-Liouville não coincidem. Mas existe uma conexão entre elas que é dada pelas relações abaixo:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right), t \in [a, b], \tag{3.31}$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(b) \right), t \in [a, b]. \tag{3.32}$$

Em particular, se $0 < Re(\alpha) < 1$ para $t \in [a, b]$, tem-se:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha (f(t) - f(a)), \tag{3.33}$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha (f(t) - f(b)), \tag{3.34}$$

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^\alpha}, \tag{3.35}$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = {}_t D_b^\alpha f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)(b-t)^\alpha}. \tag{3.36}$$

3.3 Aplicações do Cálculo Fracionário

Desde a origem do cálculo fracionário, pesquisas têm sido realizadas e publicadas. Os atuais avanços do cálculo fracionário são cheios de modernas aplicações em física, processamento de sinais, mecânica de fluidos, viscoelasticidade, biologia matemática, eletroquímica, dentre outros [16]. Nesta seção, ater-se-á especificamente a um levantamento de aplicações do Cálculo Fracionário no campo da Física.

3.3.1 Viscoelasticidade

A viscoelasticidade é o campo das aplicações mais amplo do cálculo fracionário. Nessa área, estuda-se o comportamento de materiais com propriedades elásticas e viscosas quando submetidos à forças de deformação. Tem-se que quase todos os materiais deformados exibem essas propriedades através do armazenamento simultâneo e dissipação de energia mecânica. Para entender a relação entre as características citadas é fundamental o uso dos conceitos: tensão $\sigma(t)$ e deformação $\epsilon(t)$. Várias relações tensão-deformação são conhecidas em viscoelasticidade e elas representam modelos matemáticos para um sólido ou líquido ideal [66].

Na literatura, as leis que descrevem as relações entre as propriedades citadas anteriormente, são: a de Newton, usada para descrever o comportamento de um fluido (fluido newtoniano) e no qual o modelo é dado por.

$$\sigma(t) = \eta \frac{d}{dt}\epsilon(t), \tag{3.37}$$

onde η é a constante de viscoelasticidade do material.

A outra lei é a de Hooke, usada para descrever o comportamento dos materiais elásticos, no qual o modelo é descrito por:

$$\sigma(t) = E\epsilon(t), \tag{3.38}$$

onde E é a constante de elasticidade.

Ensaios experimentais para descrever a relação tensão-deformação são:

1. **Relaxação de tensão via deformação controlada**, onde no material testado é medido o estado de tensão, que é consequência de uma deformação previamente estabelecida. Neste caso, a tensão gerada pela deformação aplicada é chamada módulo de relaxação e denotada por $G(t)$.

2. **Teste de fluência via tensão controlada**, em que o material recebe uma tensão previamente estabelecida e são medidas as deformações consequentes da aplicação de tensão no material. Neste caso, a deformação causada por essa tensão é chamada de fluência, denotada por $J(t)$.

Os modelos de Newton e Hooke descrevem o comportamento de materiais considerando as condições ideais do meio. Na busca por um modelo realístico, outros pesquisadores fizeram grandes contribuições. Nesse caso, é importante citar os modelos de Voigt e Maxwell. Na Figura 2, "item a", o elemento elástico descrito por molas representa o funcionamento (ou mecânica) do modelo de Hooke; o "item b", elemento viscoso descrito por amortecedor, representa o funcionamento do modelo de Newton. Baseado nestes dois mecanismos, Voigt apresenta um modelo que descreve o funcionamento dos dois mecanismos quando combinados em paralelo, como mostra o "item c" da Figura 2. Já Maxwell apresenta um modelo que leva em consideração a combinação dos dois, porém dispostos em série [47].

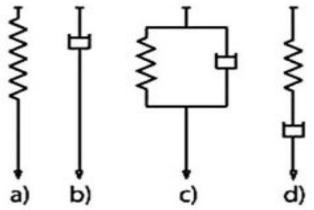

Figura 2: Representações de modelos mecânicos básicos [47].

Conforme [66], as excitações usadas para os ensaios experimentais são descritas pelo impuso δ-Dirac ou a função degrau $H(t)$ definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}. \tag{3.39}$$

Modelo de Voigt- a equação que descreve o modelo de Voigt é dada a seguir:

$$\sigma(t) = E\epsilon(t) + \eta \frac{d}{dt}\epsilon(t), \tag{3.40}$$

para esta equação o módulo de relaxação, denotado por $G_V(t)$, e o módulo de fluência $J_V(t)$ são dados por:

$$G_V(t) = EH(t) + \eta\delta(t), \tag{3.41}$$

$$J_V(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}). \tag{3.42}$$

Modelo de Maxwell- a equação que representa o modelo de Maxwell é dada por:

$$\frac{1}{\eta}\sigma(t) + \frac{1}{E}\frac{d}{dt}\sigma(t) = \frac{d}{dt}\epsilon(t), \tag{3.43}$$

onde E é a constante de elasticidade, η constante de viscosidade, ϵ é a deformação e σ é a tensão.

As funções módulo de relaxação $G_M(t)$ e fluência $J_M(t)$ são dadas por:

$$G_M(t) = Ee^{\frac{-E}{\eta}t}, \tag{3.44}$$

$$J_M(t) = \frac{1}{E}H(t) + \frac{1}{\eta}t. \tag{3.45}$$

Apesar dos modelos de Voigt e Maxwell apresentarem resultados mais realísticos, também possuem limitações, as quais dão origem a investigação de outros modelos, por exemplo, tem-se, Kelvin, Burger, Zener, dentre outros [66].

Em [66] podem ser encontrados outros modelos e detalhes sobre o funcionamento de cada um. Dentre os modelos, destacam-se aqueles constituídos por derivada(s) fracionária(s).

Importantes resultados têm sido obtidos com esses modelos. Uma generalização para o comportamento viscoelástico dos materiais, via derivadas fracionárias, pode ser dado por:

$$\sigma(t) = E\tau^{\alpha} D^{\alpha}\epsilon(t), \tag{3.46}$$

onde $0 < \alpha < 1$, $\tau = \dfrac{\eta}{E}$, ϵ é a constante de viscosidade e E é a constante de elasticidade.

Note que $\alpha = 0$, recupera-se o modelo de Hooke e para $\alpha = 1$, tem-se o modelo de Newton. Na equação (3.46), o operador fracionário D^{α} pode ser, por exemplo, a derivada fracionária de Riemann-Liouville, ou a derivada fracionária de Caputo, ou Caputo-Fabrizio. Claro que a escolha do operador vai estar associada com as propriedades a serem analisadas.

Os módulos de relaxação $G(t)$ e fluência $J(t)$, associados a equação, podem ser calculados pela transformada de Laplace, onde os resultados são [66]:

$$G(t) = \frac{E\tau^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \tag{3.47}$$

$$J(t) = \frac{1}{E\tau^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.48}$$

onde E é a constante de elasticidade e Γ é a função gama.

Grande parte dos resultados relevantes para esse modelo fracionário, deve-se a pesquisadores como Blair [3], Gerasimov [18], Slonimsky [75], Stiassnie [77], Caputo e Mainardi [46, 9]. Sendo a contribuição dos dois últimos, inspiração para diversos pesquisadores. Não somente na utilização desses operadores, no estudo dos materiais viscoelásticos, como também em diversas áreas compreendendo a física-matemática.

3.3.2 Oscilador Harmônico

O movimento harmônico simples estuda o movimento periódico e oscilatório, ou seja, aquele que sob as mesmas condições se repete em espaços de tempos iguais. O oscilador harmônico é composto de um corpo de massa m apoiado sobre uma superfície sem atrito, preso a uma mola helicoidal, ideal, e que possui uma constante elástica k. Quando o oscilador se encontra em equilíbrio e lhe é aplicada uma força externa sobre o corpo, na tentativa de esticar ou comprimir a mola, e após isto esse corpo é solto. Dessa forma, pode-se observar que a massa começa a executar um movimento harmônico simples cujo período é T.

A equação diferencial que representa o oscilador harmônico é dada por:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \mu\frac{d}{dt}x(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \tag{3.49}$$

onde $\mu \geq 0$ representa o termo associado ao atrito, $\omega > 0$ é a frequência e $f(t)$ é o termo fonte (ou força externa). Considerando as condições iniciais $x(0)$ e $x'(0)$ dadas. Um modo de analisar a equação (3.49) é usar a metodologia da transformada de Laplace. Assim, aplicando a transformada de Laplace na equação (3.49), tem-se:

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \mu\frac{d}{dt}x(t) + \omega^2 x(t)\right] = \mathscr{L}[f(t)],$$

$$s^2\hat{x}(s) - x'(0) - sx(0) + \mu[s\hat{x}(s) - x(0)] + \omega^2\hat{x}(s) = \hat{f}(s),$$

$$(s^2+\mu(s)+\omega^2)\hat{x}(s)=x'(0)+(s+\mu)x(0)+\hat{f}(s),$$

$$\hat{x}(s)=\frac{x'(0)+(s+\mu)x(0)+\hat{f}(s)}{s^2+\mu s+\omega^2}. \tag{3.50}$$

onde $\hat{x}(s)$ e $\hat{f}(s)$ são as transformadas de Laplace das funções $x(t)$ e $f(t)$, respectivamente.

A solução da equação diferencial com condições iniciais dadas é obtida pela transformada de Laplace inversa da equação (3.50). Note que se o termo fonte $f(t)$ for nulo para todo t e se o atrito puder ser desprezado $\mu=0$, tem-se que a equação (3.50) fica da forma:

$$\hat{x}(s)=\frac{x'(0)+sx(0)}{s^2+\omega^2}, \tag{3.51}$$

em que a solução explícita é dada por:

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[\hat{x}(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+\omega^2}\right]x'(0)+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right]x(0), \tag{3.52}$$

$$x(t)=\frac{x'(0)}{\omega}\operatorname{sen}(t)+x(0)\cos(t), \tag{3.53}$$

que é a solução da equação diferencial associada ao oscilador harmônico simples.

Muitos pesquisadores têm estudado o comportamento do oscilador harmônico usando as derivadas fracionárias em sua modelagem. A justificativa que tem sido empregada para o uso desses operadores é baseada nos efeitos de memória que influenciam o fenômeno. Tem-se observado que o uso das derivadas fracionárias fornecem respostas mais precisas, onde as mesmas estão diretamente associadas com tais efeitos. Assim, a fim de exemplificar o que foi colocado, apresenta-se a seguir o modelo fracionário do oscilador harmônico simples, onde seu efeito é dado via a metodologia da transformada de Laplace.

A equação do oscilador harmônico simples fracionário é dada por:

$${}_0^CD_t^\alpha x(t)+\omega^\alpha x(t)=0, \tag{3.54}$$

onde $1<\alpha\leq 2$, ${}_0^CD_t^\alpha$ é a derivada fracionária no sentido de Caputo e as condições iniciais são $x(0)$ e $x'(0)$.

Aplicando a transformada de Laplace na equação (3.54), obtém-se:

$$\mathscr{L}[{}_0^CD_t^\alpha x(t)+\omega^\alpha x(t)]=\mathscr{L}[0],$$

$$\mathscr{L}[{}_0^CD_t^\alpha x(t)]+\omega^\alpha\mathscr{L}[x(t)]=\mathscr{L}[0],$$

$$s^\alpha\hat{x}(s)-s^{\alpha-1}x(0)-s^{\alpha-2}x'(0)+\omega^\alpha\hat{x}(s)=0$$

$$(s^\alpha+\omega^\alpha)\hat{x}(s)=s^{\alpha-1}x(0)+s^{\alpha-2}x'(0)$$

$$\hat{x}(s)=\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\omega^\alpha}x(0)+\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha+\omega^\alpha}x'(0). \tag{3.55}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa em (3.55), tem-se:

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[\hat{x}(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\omega^\alpha}\right]x(0)+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha+\omega^\alpha}\right]x'(0). \tag{3.56}$$

$$x(t)=E_\alpha(-\omega^\alpha t^\alpha)x(0)+tE_{\alpha,2}(-\omega^\alpha t^\alpha)x'(0), \tag{3.57}$$

onde E_α e $E_{\alpha,2}$ são respectivamente, funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros.

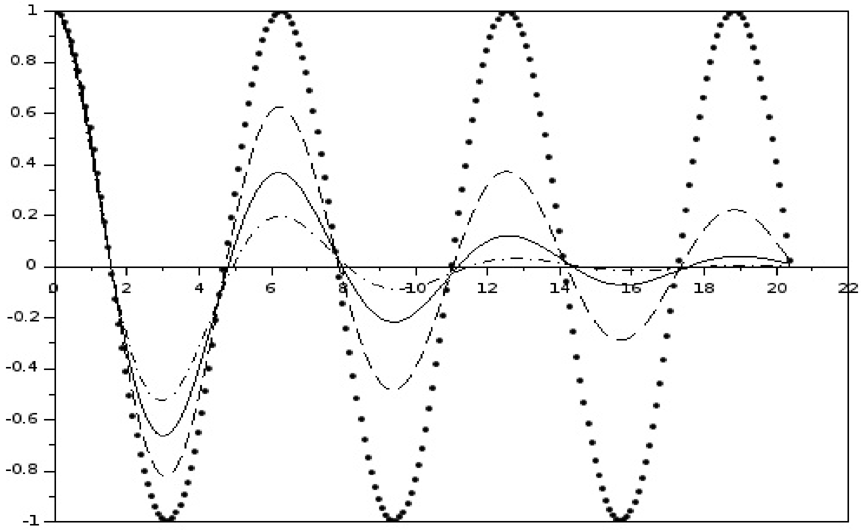

Figura 3: Gráfico do oscilador harmônico fracionário, curva pontilhada $\alpha = 2$; curva tracejada $\alpha = 1,9$; curva contínua $\alpha = 1,8$; curva traço-ponto $\alpha = 1,7$.

A fim de exemplificar a solução $x(t)$ dada pela equação (3.57), consideram-se as condições iniciais $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$ e o parâmetro $\omega = 1$, obtém-se $x(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$. Assim, para estes valores dados, a Figura 3 ilusta o comportamento do oscilador harmônico fracionário para alguns valores do parâmetro α.

Baseado no gráfico, conclui-se que o comportamento do oscilador harmônico fracionário pode ser interpretado como um oscilador harmônico com amortecimento, onde o amortecimento está diretamente definido pelo parâmetro α.

4 Considerações Finais

Frisa-se que o Cálculo Fracionário é tão importante quanto o cálculo de ordem inteira, devido ao grande número de aplicações em muitas áreas como, Física, Engenharia, Mecânica, Biologia, etc. Muitos pensam que é uma ciência nova, quando na verdade não é, haja vista que seu desenvolvimento deu-se quase que paralelo com o tão conhecido cálculo de ordem inteira.

Sua origem deu-se através de trocas de correspondências entre Leibniz e ℓ' Hôpital, como já explicitado no Capítulo 1. Nas últimas décadas, o CF tornou-se uma área de intensa pesquisa e desenvolvimento. Esta dissertação lembra importantes pesquisadores de várias partes do mundo, que demonstraram interesse em estudar o assunto. Enfatiza-se que foram dadas muitas contribuições que foram de grande valia para o desenvolvimento do cálculo fracionário.

Neste trabalho buscou-se apresentar o desenvolvimento do CF até os dias atuais, tanto no mundo quanto no Brasil. O objetivo era mostrar que no Brasil, o CF tem sido reconhecido como de fundamental importância. Há vários pesquisadores que se dedicam a estudar sobre o tema e o número de publicações na área tem sido crescente. Novos operadores fracionários têm sido apresentados por pesquisadores brasileiros, conforme apresentado no Capítulo 2. Existem grupos de pesquisas voltados ao CF. Viu-se também que há pesquisadores motivados para que o CF seja tido como disciplina nas universidades, nota-se que ainda não é uma realidade no Brasil, mas acredita-se que em breve o CF fará parte das ementas dos cursos nas universidades brasileiras.

Congressos, conferências, simpósios, voltados ao tema são realizados com objetivos específicos, tais como: troca de ideias, novas aplicações e estimular novos pesquisadores na área. Alguns pesquisadores são homenageados em alguns destes eventos, pelo fato de dedicarem-se a pesquisar e divulgar o CF.

No Capítulo 3, apresentaram-se as definições de pesquisadores como Riemann, Liouville, Caputo, Riesz e Weyl, que são importantes até os dias de hoje. Há um vasto número de aplicações, mas neste trabalho concentrou-se na viscoelasticidade e oscilador harmônico, pois a finalidade era apresentar as aplicações no campo da Física.

Assim como o cálculo de ordem inteira, o cálculo fracionário possui inúmeras definições, propriedades e teoremas fundamentais. A partir daí, observa-se que o cálculo que conhecemos e o cálculo fracionário não são tão diferentes, os mesmos têm suas aplicações e suas grandes utilidades.

Referências

[1] ATANACKOVIĆ, T M. et al. *Fractional Calculus with Applications in mechanics Vibrations and diffusion processes.* Londres: Wiley-ISTE, 2014.

[2] BAGLEY, R. L. *Applications of Generalized Derivatives to Viscoelasticity.* Tese de doutorado, Instituto de Tecnologia da Força Aérea (EUA), 1979.

[3] BLAIR, G. W. S. The role of psychophysics in rheology. *Journal of Colloid Science*, v. 2, n. 1, p. 21–32, DOI: 10.1016/0095-8522(47)90007-X, 1947.

[4] BATTHA, D.; DEBNATH, L. *Integral Transforms and Their Applications.* 3 ed. Londres: CRC Press, 2015.

[5] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. 1 ed. *Cálculo fracionário.* São Paulo: Livraria da Física, 2015.

[6] CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; OLIVEIRA, E. C. D. Addition theorem associated with the generalized Mittag-Leffler functions. *Relatório de Pesquisa R.P* 34/07, 2007.

[7] ——. Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation. *Jornal of Mathematical Physics*, v. 49, n. 3, DOI: 10.1063/1.2890375, 2008.

[8] CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, v. 1, n. 2, p. 73-85, 2015.

[9] CAPUTO M.; MAINARDI, F. A new dissipation model based on memory mechanism. *Pure and Applied Geophysics* , v. 91, p. 134–147, 1971.

[10] ——. Applications of New Time and Spatial Fractional Derivatives with Exponential Kernels. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, v. 2, n. 1, p. 1-11, 2016.

[11] CNMAC. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017.

[12] COSTA, F. S. et al. Integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox. *TEMA- Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 12, n. 2, p. 157-169, 2011.

[13] COSTA, F. S. Função H. de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário. Tese de doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, São Paulo, 2011.

[14] DAS, S. *Functional fractional calculus.* 2 ed. Nova Iorque: Springer, 2011.

[15] DAVID, S. A; LINARES, J. L.; PALLONE, E.M.J.A. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 33, n. 4, p. 4302–4302, 2011.

[16] DEBNATH, L. Recent applications of fractional calculus. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, v. 2003, n. 54, p. 3413-3442, 2003.

[17] DELKOSH, M. Introduction of derivatives and integrals of fractional order and its applications. *Applied Mathematics and Physics*, v. 1, n. 4, p. 103-119, 2013.

[18] GERASIMOV, A. N. A generalization of linear laws of deformation and its application to problems of internal friction. Prikl. Mat. Meh., v. 12 , p. 251–260, 1948.

[19] GÓMEZ-AGUILLAR, J. F. Irving–Mullineux oscillator via fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 95, p. 179-186, 2017.

[20] GRIGOLETTO, E. C. *Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler*. Tese de doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, São Paulo, 2014.

[21] HERMANN, R. *Fractional calculus: an introduction for physicists*. Toh Tuck Link: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2011.

[22] HAO, X. et al. Relaxation and diffusion models with non-singular kernels. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 468, p. 590-596, 2017.

[23] HERZALLAH, M. A. E. Notes on some fractional calulus operators and their properties. *Journal of Fractional Calculus and Applications*, v. 5, n. 19, p. 1-10, 2014.

[24] HEYMANS, N.; PODLUBNY, I. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivates. *Rheologica Acta*, v. 45, n. 5, p. 765-771, 2006.

[25] KHALIL, R. et al. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics* , v. 264, p. 65-70, 2014.

[26] KATUGAMPOLA, U. N. A new fractional derivative with classical properties. *Journal of the american mathematical society*, ArXiv:1410.6535v1, 2014.

[27] KIRYAKOVA, V. A brief story about the operators of the generalized fractional calculus. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 11, n. 2, 2008.

[28] KIRYAKOVA, V. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 17, n. 1, p. 1347–1355, 2014.

[29] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 18, n. 1, 2015.

[30] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 19, n. 1, p. 1-10, 2016.

[31] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 19, n. 3, p. 573-579, 2016.

[32] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 19, n. 6, p. 1347–1355, 2016.

[33] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 20, n. 1, p. 1-6, 2017.

[34] ——. Related news, events and books. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 20, n. 3, p. 567–573, 2017.

[35] ——. Related meetings, books in memoriam. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 15, n. 3, p. 345- 528, DOI: 10.2478/s13540-012-0025-0, 2012.

[36] ——. Related meetings, books in memoriam. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, v. 15, n. 4, p. 529–535, DOI: 10.2478/s13540-012-0037-9, 2012.

[37] KOLWANKAR, K.; GANGAL, A. D. *Local fractional derivatives and fractal functions of several variables. Mathematical Physics*, arXiv:physics/9801010, 1996.

[38] MACHADO, J. A. T.; GALHANO, A. M. S. F.; TRUJILLO, J. J. On development of fractional calculus during the last fifty years. *Scientometrics*, Springer, v. 98, n. 1, p. 577–582, 2014.

[39] MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V. The Chronicles of Fractional Calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 20, n.2, p. 307-336, DOI: 10.1515/fca-2017-0017, 2017.

[40] MACHADO, J. A. T. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 6, p. 73-80, 2003.

[41] ——. Report on the Workshop on Future Directions in Fractional Calculus Research and Applications Michigan State University. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 19, n. 6, p. 1347–1355, DOI: 10.1515/fca-2016-0070, 2016.

[42] MACHADO, J. A. T. et al. Round table discussion: Fractional Calculus:D'o*ù* Venons-Nous? Que Sommes- Nous? O*ù* Allons-Nous?. (Contributions to Round Table Discussion held at ICFDA'2016). *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 19, n. 5, p. 1074–1104, DOI: 10.1515/fca-2016-0059, 2016.

[43] MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. A. Fractional Calculus: Quo Vadimus? (Where are we Going?). *Fractional Calculus and Applied Analysis*, DOI: 10.1515/fca-2015-0031, 2015.

[44] ——. A poster about the recent history of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 13, n. 3, 2010.

[45] ——. Recent history of fractional calculus. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, n. 16, p. 1140-1153, 2011.

[46] MAINARDI, F. Applications of fractional calculus in mechanics. *Transform Methods & Special Functions, Varna'96*, p. 309–334, 1998.

[47] ——. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models*. Londres: Imperial College Press, 2010.

[48] ——. The time fractional diffusion-wave equation. *Radiophysics and Quantum Electronics*, v. 38, n. 1-2, p. 13-24, DOI: 10.1007, 1995.

[49] ——. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos Solitons Fract.*, v. 7, p. 1461-1477, 1996.

[50] MAINARDI, F.; TOMIROTTI, M. *On a special function arising in the time fractional diffusion-wave equation.* In: Transform Methods and Special Functions, Sofia 1994 (Proc. 1st Intern. Workshop), p. 171-183, Science Culture Technology, Cingapura, 1995.

[51] NISHIMOTO, K. *Fractional Calculus.* v. 1. Japão: Descartes Press, 1984.

[52] ——. Fractional Calculus. v. 2. Japão: Descartes Press, 1987.

[53] ——. Fractional Calculus. v. 3. Japão: Descartes Press, 1989.;

[54] ——. Fractional Calculus. v. 4. Japão: Descartes Press, 1991.

[55] OLDAM, K. B.; SPANIER, J. *The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Nova Iorque: Dover Publications, 2002.

[56] ——. The Fractional Calculus. *Mathematics in Science and Engineering.* Nova Iorque: Academic Press, 1974. v. 111.

[57] OLIVEIRA, D. S. *Derivada fracionária e as funções de Mittag-Leffler.* Dissertação de mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, São Paulo, 2014.

[58] OLIVEIRA, D. S.; TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, E. C. D. Sobre Derivadas Fracionárias. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 40, n. 2, DOI: 10.1590, 2017.

[59] OLIVEIRA, E. C.; MACHADO, A. J. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. *Hindawi Publishing Corporation*, Mathematical Problems in Engineering, v. 2014, ID 238459, DOI: 10.1155, 6 páginas, 2014 .

[60] OLIVEIRA, H. S. *Introdução ao cálculo de ordem arbitrária.* Dissertação de mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, São Paulo, 2010.

[61] ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? *Journal of Computational Physics*, v. 293, p. 4-13, 2015.

[62] PAGNINI, G.; SCALAS, E. Historical notes on the M-Wright/Mainardi function. *Communications in Applied and Industrial Mathematics*, v. 6, n. 1, e–496, DOI: 10.1685, 2014.

[63] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations: mathematics in science and engineering.* 1 ed. San Diego: Academic Press, 1999. v. 198.

[64] ——. Geometric and physical interpretation of fractional integral and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 5, n 4, p. 367-386, 2002.

[65] POTAPOV, A. A.; CHERNYKH, V. A. *Fractional Calculus of A. V. Letnikov in Physics of Fractals.*LAMBERT Academic Publ., 2012.

[66] RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 37, n.3, p. 3305-1-3305-12, 2015.

[67] ROGOSIN, S. V. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations, AMADE-2011.* Proc. of the 6th International Conference AMADE, dedicated to the memory of Professor A.A.Kilbas, Minsk: Publ. Center of Belarusian State University, 2012.

[68] ROSENDO, D. C. *Sobre a função de Mittag-Leffler*. Dissertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, São Paulo, 2008.

[69] ROSS, B.; MILLER, K. S. *An Introdution to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. Nova York: John Wiley and Son, 1993.

[70] ROSS, B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. *Fractional Calculus and its Applications*, Lecture Notes in Mathematics, v. 57, p. 1-36, 1975.

[71] ——. The development of fractional calculus: 1695-1900. *Historia Mathematica*, n. 4, p. 75-89, 1977.

[72] ——. Fractional calculus and its applications. *Lecture Notes in Mathematics*, v. 457, p. 1-385, 1974.

[73] SABATIER, J. AGRAWAL, O. P.; MACHADO, J. A. T. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Nova Iorque: Springer, 2007.

[74] SBMAC. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 3, n. 1, 2015.

[75] SLONIMSKY, G. L. Slonimsky. *On the law of deformation of highly elastic polymeric bodies*, Dokl. Akad. Nauk BSSR, v. 110, n.2, p. 343–346, 1961.

[76] SOUSA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. C. D. On two new operators in fractional calculus and application. *Math. CA*, arXiv:1710.03712, 2017.

[77] STIASSNIE, M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models. *Applied Mathematical Modelling*, v. 3, n. 4, p. 300–302, DOI: 10.1016/S0307-904X(79)80063-3, 1979.

[78] TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, E. C. D. Derivadas fracionárias: critérios para classificação. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 10, p. 10-19, 2017.

[79] VALÉRIO, D.; MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V. Some pioneers of the applications of fractional calculus. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, v. 17, n. 2, p. 552–578, 2014.

[80] VIEIRA, D. S. *Equações de Difusão e o Cálculo Fracionário*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2015.

[81] WESTPHAL, U.; BUTZER, P.L. *An introduction to fractional calculus*. In: Hilfer R. , Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, p. 1-85, 2000.

[82] YANG, X. et al. A new fractional derivative without singular kernel: application to the modelling of the steady heat flow. *Thermal Science*, v. 20, n. 2, p. 753-756, 2016.

[83] YANG, X.; MACHADO, J. A. T. A new fractional operator of variable order: application in the description of anomalous diffusion. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, v. 481, p. 276-283, 2017.